

## Сибирский физический журнал

Журнал адресован профессорско-преподавательскому составу университетов, научным работникам, аспирантам и студентам, которые интересуются новейшими результатами фундаментальных и прикладных исследований по различным направлениям физики и физико-технической информатики.

Редакция принимает к опубликованию обзоры и оригинальные научные статьи по тем направлениям физики, которые, главным образом, представлены на кафедрах физического факультета НГУ. Принимаются также к рассмотрению статьи по другим направлениям, если в ходе рецензирования подтверждается их

высокий научный статус.

Мы приглашаем научные коллективы и отдельных авторов направлять к нам для опубликования материалы по следующим основным разделам:

1. В разделе **«Квантовая оптика, квантовая электроника»** публикуются статьи по следующим специальностям, по которым присуждаются учёные степени кандидата и доктора наук:

1.3.6. Оптика (Физико-математические, Технические науки);

1.3.19. Лазерная физика (Физико-математические, Технические науки).

**Редакторы раздела:**

*Бабин Сергей Алексеевич*, доктор физ.-мат. наук, член-корреспондент РАН, директор ИАиЭ СО РАН, заведующий кафедрой квантовой оптики ФФ НГУ;

*Ильичев Леонид Вениаминович*, доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник ИАиЭ СО РАН профессор кафедры квантовой оптики ФФ НГУ.

2. В разделе **«Радиофизика и электроника»** публикуются статьи по следующим специальностям, по которым присуждаются учёные степени кандидата и доктора наук:

1.3.4. Радиофизика (Физико-математические, Технические науки);

1.3.5. Физическая электроника (Физико-математические, Технические науки).

**Редакторы раздела:**

*Песков Николай Юрьевич*, д-р физ.-мат. наук, профессор РАН, зам. заведующего научным отделом ИПФ РАН (Нижний Новгород);

3. В разделе **«Физика жидкости, нейтральных и ионизованных газов»** публикуются статьи по следующим специальностям, по которым присуждаются учёные степени кандидата и доктора наук:

01.02.05. Механика жидкости, газа и плазмы (Физико-математические, Технические науки);

1.3.14. Теплофизика и теоретическая теплотехника (Физико-математические, Технические науки).

**Редакторы раздела:**

*Козлов Виктор Владимирович*, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник ИТПМ СО РАН, профессор кафедры аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ;

*Алексеев Сергей Владимирович*, д-р физ.-мат. наук, профессор, академик РАН, советник директора ИТФ СО РАН, зав. кафедрой физики неравновесных процессов ФФ НГУ.

4. В разделе **«Физика высоких энергий, ускорителей и высокотемпературной плазмы»** публикуются статьи по следующим специальностям, по которым присуждаются учёные степени кандидата и доктора наук:

1.3.15. Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий (Физико-математические, Технические науки);

1.3.18. Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника (Физико-математические, Технические науки);

1.3.9. Физика плазмы (Физико-математические, Технические науки).

**Редакторы раздела:**

*Дружинин Владимир Прокопьевич*, д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией ИЯФ СО РАН, профессор кафедры физики элементарных частиц ФФ НГУ;

*Тельнов Валерий Иванович*, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник ИЯФ СО РАН, зав. кафедрой физики ускорителей ФФ НГУ;

*Аржанников Андрей Васильевич*, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник ИЯФ СО РАН, профессор кафедры физики плазмы ФФ НГУ.

5. В разделе **«Физика твердого тела, полупроводников, наноструктур»** публикуются статьи по следующим специальностям, по которым присуждаются учёные степени кандидата и доктора наук:

1.3.11. Физика полупроводников (Физико-математические, Технические науки);

1.3.8. Физика конденсированного состояния (Физико-математические, Технические науки);

- 1.3.20. Кристаллография, физика кристаллов (Физико-математические, Химические науки);  
2.6.6. Нанотехнологии и наноматериалы (Технические, Физико-математические, Химические науки).

**Редакторы раздела:**

*Латышев Александр Васильевич*, д-р физ.-мат. наук, профессор, академик РАН, директор ИФП СО РАН, зав. кафедрой физики полупроводников ФФ НГУ;

*Цыбуля Сергей Васильевич*, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией ИК СО РАН, зав. кафедрой физических методов исследования твёрдого тела ФФ НГУ;

*Захаров Борис Александрович*, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник ИНХ СО РАН, заведующий кафедрой химии твердого тела.

6. В разделе «**Физика химическая, биологическая, медицинская**» публикуются статьи по следующим специальностям, по которым присуждаются учёные степени кандидата и доктора наук:

1.3.16. Атомная и молекулярная физика (Физико-математические, Технические науки);

1.3.17. Химическая физика, горение и взрыв, физика экстремальных состояний вещества (Физико-математические, Технические, Химические науки);

1.3.21. Медицинская физика (Физико-математические, Технические науки).

**Редакторы раздела:**

*Дзюба Сергей Андреевич*, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией ИХКГ СО РАН, профессор кафедры химической и биологической физики ФФ НГУ;

*Мальцев Валерий Павлович*, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией ИХКГ СО РАН, зав. кафедрой медицинской физики ФФ НГУ.

7. В разделе «**Теоретическая и математическая физика**» публикуются статьи по следующим специальностям, по которым присуждаются учёные степени кандидата и доктора наук:

1.3.3. Теоретическая физика (Физико-математические науки).

**Редактор раздела:**

*Силагадзе Зураб Карлович*, канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник ИЯФ СО РАН.

8. В разделе «**Информатика, информационно-коммуникационные технологии**» публикуются статьи по следующим специальностям, по которым присуждаются ученые степени кандидата и доктора наук:

1.2.1. Искусственный интеллект и машинное обучение (Физико-математические, Технические науки);

2.2.2. Электронная компонентная база микро- и наноэлектроники, квантовых устройств (Физико-математические, Технические науки);

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации;

2.3.5. Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей.

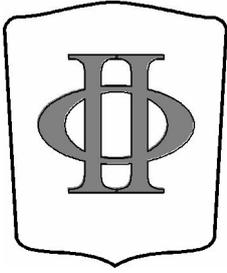
**Редактор раздела:**

*Двойнишников Сергей Владимирович*, д-р техн. наук, профессор.

9. Раздел «**Учебно-методическое обеспечение преподавания физики**».

**Редактор раздела:**

*Володин Владимир Алексеевич*, д-р физ.-мат. наук., профессор, ведущий научный сотрудник ИФП СО РАН.



## Siberian Journal of Physics

The magazine is addressed to the faculty of universities, science officers, post-graduate students and students who are interested in the newest results fundamental and applied researches in various directions of physics and physico-technical computer science.

Edition accepts to publication reviews and original scientific articles in those directions of physics which, mainly, are presented on faculties of physical faculty of NSU. Are accepted also to viewing article in other directions if during reviewing their high title proves to be true.

We invite scientific personnel and separate authors to guide to us for publication materials on following basic sections:

1. The section of the Siberian Physical Journal “Quantum Optics, Quantum Electronics” publishes articles on the following specialties:

1.3.6. Optics

1.3.19. Laser Physics

**Editors of this section are**

*S. A. Babin* Academician of the RAS, Dr. Sci., Head of the of Quantum Optics Department of Novosibirsk State University, Director of the IAE SB RAS;

*L. V. Il'ichev*, Dr. Sci., Professor, Leading Researcher of the IAE SB RAS.

2. The section of the Siberian Physical Journal “Radiophysics and Electronics” publishes articles on the following specialties:

1.3.4. Radiophysics

1.3.5. Physical Electronics

**Editor of this section is**

*N. Yu. Peskov*, Dr. Sci., Professor RAS, Deputy Head of Division of High-power Microwave Electronics of the Institute of Applied Physics.

3. The section of the Siberian Physical Journal “Physics of liquids, neutral and ionized gases” publishes articles on the following specialties:

01.02.05. Mechanics of liquids, gases and plasmas

1.3.14. Thermal physics and theoretical heat engineering

**Editors of this section are**

*V. V. Kozlov*, Dr. Sci., Professor Head of Laboratory of Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS;

*S. V. Alekseenko*, Academician of the RAS, Dr. Sci. Professor, Head of the Nonequilibrium Processes Physics Department of Novosibirsk State University, advisor to the director of Institute of Thermal Physics SB RAS.

4. The section of the Siberian Physical Journal “Physics of High Energy, Accelerators, and High-Temperature Plasma” publishes articles on the following specialties:

1.3.15. Physics of Atomic Nuclei and Elementary Particles, High Energy Physics

1.3.18. Physics of Charged Particle Beams and Accelerator Technology

1.3.9. Plasma Physics

**Editors of this section are**

*V. P. Druzhinin*, Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory of the BINP SB RAS;

*V. I. Telnov*, Dr. Sci., Professor, Leading Researcher of the BINP SB RAS;

*A. V. Arzhannikov*, Dr. Sci., Professor, Leading Researcher of the BINP SB RAS.

5. The section of the Siberian Physical Journal “Physics of Solid State, Semiconductors, Nanostructures” publishes articles on the following specialties:

1.3.11. Physics of Semiconductors

1.3.8. Physics of Condensed Matter

1.3.20. Crystallography, Physics of Crystals

2.6.6. Nanotechnology and Nanomaterials

**Editors of this section are**

*A. V. Latyshev*, Dr. Sci., professor, Corresponding Member of RAS. Head of the Semiconductor Physics Department of Novosibirsk State University. Director of Institute of Semiconductor Physics SB RAS;

*S. V. Tsybulya*, Dr. Sci., Associate Professor, Head of the Physical Methods of Solid State Research Department of Novosibirsk State University, Leading Researcher of Institute of Catalysis SB RAS;

*B. A. Zakharov*, Dr. Sci., Leading Researcher of Institute of the NIIC SB RAS, Associate Professor, Head of the Department of Solid State Chemistry of NSU.

6. The section of the Siberian Physical Journal “Chemical, Biological, Medical Physics” publishes articles on the following specialties:

1.3.16. Atomic and molecular physics

1.3.17. Chemical physics, combustion and explosion, physics of extreme states of matter

1.3.21. Medical physics

***Editors of this section are***

*S. A. Dziuba*, Dr. Sci., Professor. Head of the Chemical and Biological Physics Department of Novosibirsk State University, Head of Laboratory of Institute of Chemical Kinetics and Combustion SB RAS;

*V. P. Maltsev*, Dr. Sci., Associate Professor, Head of the Biomedical Physics Department of Novosibirsk State University, Head of Laboratory of Institute of Chemical Kinetics and Combustion SB RAS.

7. The section of the Siberian Physical Journal “Theoretical and Mathematical Physics” publishes articles on the following specialties:

1.3.3. Theoretical Physics

***Editor of this section is***

*Z. K. Silagadze*, Dr. Sci., Associate Professor, Senior Research of the BINP SB RAS.

8. The section of the Siberian Physical Journal “Informatics, information and communication technologies” publishes articles on the following specialties:

1.2.1. Artificial intelligence and machine learning

2.2.2. Electronic component base of micro- and nanoelectronics, quantum devices

2.3.1. Systems analysis, management and information processing;

2.3.5. Mathematical and software support for computing systems, complexes and computer networks  
Mathematical modeling, numerical methods and software packages

***Editor of this section is***

*S. V. Dvoinishnikov*, Dr. Sci., Professor.

9. Section "Educational and methodological support for teaching physics".

***Editor of this section is***

*V. A. Volodin*, Dr. Sc., Professor, Leading Researcher of Institute of Semiconductor Physics SB RAS.

Periodicity of an exit of the edition – 4 times a year. The magazine is included in list Higher Attestation Committee of scientific and technical editions in Russian Federation in which the publication of the basic results of dissertations on competition of a scientific degree of the doctor and candidate of sciences is recommended.

# СИБИРСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Научный журнал  
Основан в 2006 году

2025. Том 20, № 1

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### **Физика жидкости, нейтральных и ионизованных газов**

- Гапонов С. А., Семенов А. Н., Яцких А. А.* Численное моделирование развития локализованных возмущений в сверхзвуковом пограничном слое 9
- Крюков А. В., Зверков И. Д., Чехов В. П., Матвеев Д. А., Мешков А. А.* Управление аэродинамическими характеристиками вариоформного секционного крыла 20
- Лысенко В. И., Смородский Б. В., Косинов А. Д., Яцких А. А.* Влияние угла ориентации каверн периодической структуры на стабилизацию сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине 28
- Казанин И. В., Щиглова Е. П., Журавлева Д. В.* О реализации динамического режима сорбции на селективно проницаемых микросферах для выделения гелия 37
- Литвиненко Ю. А.* Режимы горения микроструй водорода 47

### **Физика твердого тела, полупроводников, наноструктур**

- Рябченко К. К., Пахомов А. Ю., Жиляев К. В., Старостенко А. А., Цыганов А. С.* Изучение изменения магнитной проницаемости нержавеющей стали при различных технологических процессах 56

### **Физика химическая, биологическая, медицинская**

- Станкевич А. В., Ячевский Д. С., Русинов Г. Л.* Фотофизическая активность продуктов медленного термического разложения 3-нитро-4,5-дигидро-1,2,4-триазол-5-она (НТО) 67

### **Учебно-методическое обеспечение преподавания физики**

- Питич П. В.* Численное решение уравнений, содержащих неизвестную под знаком интеграла. Применение к решению физических задач 75

- Информация для авторов** 94



# SIBERIAN JOURNAL OF PHYSICS

Scientific Journal  
Since 2006  
In Russian

2025. Volume 20, № 1

---

---

## CONTENTS

### **High-Energy and Accelerator Physics, Physics of High-Temperature Plasma**

- Gaponov S. A., Semenov A. N., Yatskikh A. A.* Numerical Simulation of the Localized Perturbations Development in the Supersonic Boundary Layer 9
- Kryukov A. V., Zverkov I. D., Chekhov V. P., Matveev D. A., Meshkov A. A.* Control of Aerodynamic Characteristics of a Varioform Sectional Wing 20
- Lysenko V. I., Smorodsky B. V., Kosinov A. D., Yatskikh A. A.* Effect of Periodic-Structure Grooves Orientation Angle on Supersonic Flat-Plate Boundary Layer Stabilization 28
- Kazanin I. V., Shchiglova E. P., Zhuravleva D. V.* On the Implementation of a Dynamic Sorption Mode on Selectively Permeable Microspheres for Helium Recovery 37
- Litvinenko Yu. A.* Combustion Modes of Hydrogen Microjets 47

### **Solid-state and Semiconductor Physics, Physics of Nanostructures**

- Riabchenko K. K., Pakhomov A. Yu., Zhilyaev K. V., Starostenko A. A., Tsyganov A. S.* Study of Changes in the Magnetic Permeability of Stainless Steel During Various Technological Processes 56

### **Chemical, Biological and Medical Physics**

- Stankevich A. V., Yachevskii D. S., Rusinov G. L.* Photophysical Activity for Products of Slow Thermal Decomposition of 3-nitro-4,5-dihydro-1,2,4-triazole-5-one (NTO) 67

### **Educational and Methodical Provision of Teaching of Physics**

- Pipich P. V.* Numerical Solution of Equations Containing an Unknown under the Integral Sign. Application to the Solution of Physical Problems 75

- Instructions for Contributors** 109

*Editor in Chief Andrej V. Arzhannikov*  
*Executive Secretary Anna A. Inzhevatkina*

Editorial Board of the Journal

S. V. Alekseenko, A. V. Arzhannikov, A. L. Aseev, S. N. Bagaev, A. E. Bondar  
S. A. Dzyuba, S. I. Eidelman, V. S. Fadin, V. M. Fomin, A. A. Ivanov, V. A. Volodin, V. V. Kozlov, E. V. Kozyrev  
A. V. Latyshev, I. B. Logashenko, V. P. Maltsev, A. G. Pogosov, A. L. Reznik, A. V. Shalagin  
V. I. Telnov, S. V. Tsibulya

*The series is published quarterly in Russian since 2006*  
*by Novosibirsk State University Press*

*The address for correspondence*  
Physics Department, Novosibirsk State University  
Pirogov Street 2, Novosibirsk, 630090, Russia  
*Tel. +7 (383) 363 44 25*

*E-mail address: physics@vestnik.nsu.ru*  
*On-line version: <http://www.phys.nsu.ru/vestnik/>*

Научная статья

УДК 532.526

DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-9-19

## Численное моделирование развития локализованных возмущений в сверхзвуковом пограничном слое

Сергей Александрович Гапонов<sup>1</sup>, Александр Николаевич Семенов<sup>2</sup>  
Алексей Анатольевич Яцких<sup>3</sup>

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН  
Новосибирск, Россия

<sup>1</sup>gaponov@itam.nsc.ru

<sup>2</sup>semenov@itam.nsc.ru

<sup>3</sup>yatskikh@itam.nsc.ru

### Аннотация

Численно исследовано развитие локализованных возмущений в сверхзвуковом пограничном слое для числа Маха  $M = 2$ . Установлено, что скорость переднего фронта больше скорости заднего фронта, что согласуется с экспериментальными данными. В области переднего фронта возникают колебания по мере движения волнового пакета вниз по потоку, и их амплитуда растет во времени. Для сравнения результатов численного моделирования с классической теорией устойчивости волновой пакет раскладывался в спектр по частотам и волновым числам. Максимальный вклад в суммарное возмущение принадлежит волнам с углами наклона фронта волны к передней кромке пластины, равными примерно 60 градусам. Пространственные коэффициенты их усиления хорошо согласуются с данными теории устойчивости локально непараллельных течений. Соответствие ухудшается при меньших углах наклона из-за их малости относительно вклада волн с углами 60 градусов и нелинейного взаимодействия с волнами разных частот и наклонов.

### Ключевые слова

сверхзвуковое течение, пограничный слой, гидродинамическая устойчивость, ламинарно-турбулентный переход, локализованные возмущения

### Финансирование

Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН.

### Для цитирования

Гапонов С. А., Семенов А. Н., Яцких А. А. Численное моделирование развития локализованных возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Сибирский физический журнал. 2025. Т. 20. № 1. С. 9–19. DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-9-19

# Numerical Simulation of the Localized Perturbations Development in the Supersonic Boundary Layer

Sergey A. Gaponov<sup>1</sup>, Alexander N. Semenov<sup>2</sup>,  
Alexey A. Yatskikh<sup>3</sup>

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS  
Novosibirsk, Russian Federation

<sup>1</sup>gaponov@itam.nsc.ru

<sup>2</sup>semenov@itam.nsc.ru

<sup>3</sup>yatskikh@itam.nsc.ru

## Abstract

The development of localized perturbations in the supersonic boundary layer for Mach number  $M = 2$  is numerically investigated. It is found that the leading edge velocity is greater than the trailing edge velocity, which is in agreement with the experimental data. In the leading front oscillations occur as the wave packet moves downstream and their amplitude increases in time. To compare the numerical simulation results with classical stability theory, the wave packet was decomposed into a spectrum on frequencies and wave numbers. The maximum contribution to the total perturbation belongs to waves with angles of inclination of the wave front to the plate leading edge equal to about 60 degrees. Their spatial amplification rate agree well with the data of the stability theory of locally nonparallel flows. The agreement deteriorates at smaller inclination angles due to their smallness relative to the contribution of waves with angles of 60 degrees and the nonlinear interaction with waves of different frequencies, and inclinations.

## Keywords

supersonic flow, boundary layer, hydrodynamic stability, laminar-turbulent transition, localized perturbations

## Funding

The work was performed within the framework of the state assigned task of ITPM SB RAS.

## For citation

Gaponov S. A., Semenov A. N., Yatskikh A. A. Numerical simulation of the localized perturbations development in the supersonic boundary layer. *Siberian Journal of Physics*, 2025, vol. 20, no. 1, p. 9–19. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-9-19

## Введение

В связи с проблемой ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя особое место занимает проблема порождения турбулентных пятен. Турбулентные пятна изучаются с тех пор, как Эммонс обнаружил их существование в 1951 г. [1]. Обзор ранних работ по развитию турбулентных пятен в пограничных слоях приведен в [2]. Наряду с естественными турбулентными пятнами в работах [3; 4] начались исследования искусственных пятен, генерируемых локализованными начальными возмущениями. Впервые развитие линейных волновых пакетов в дозвуковом пограничном слое было изучено в [5; 6]. Обзор других работ по экспериментальным исследованиям развития локализованных возмущений и формирования турбулентных пятен можно найти в [7]. В ней на основе фотографий, взятых из работ [8–10], обращается внимание на то, что в следе за турбулентным пятном наблюдаются продольные структуры. В книге [11] приведена обширная библиография по экспериментальному исследованию продольных структур и их взаимодействия с турбулентными пятнами в дозвуковых течениях. Кроме того, в [11] описана теория формирования продольных структур на основе оптимальных возмущений [12].

Другие подходы к генерации полосчатых структур основаны на исследованиях непрерывного спектра задачи неустойчивости дозвукового пограничного слоя [13–15] и резонансной теории взаимодействия вихревых возмущений внешнего потока с пограничным слоем [16].

Наряду с исследованиями турбулентных пятен в дозвуковом пограничном слое в [17; 18] было начато их изучение в сверхзвуковых потоках. Достаточно полный обзор таких работ имеется в [19]. Экспериментальному исследованию локализованных возмущений в сверхзвуковом пограничном слое посвящена работа [20].

Прямое численное моделирование роста пятен в сверхзвуковых пограничных слоях при  $M = 2, 4$  и  $6$  было проведено в [21], а для  $M = 6$  – в [22]. В этих работах исследовались возмущения большой амплитуды, т. е. в условиях сильной нелинейности.

В данной работе проводится прямое численное моделирование развития малых локализованных возмущений в пограничном слое при числе  $M = 2$ , в условиях экспериментов [20].

### 1. Постановка задачи, основные уравнения, численный метод

Течение газа описывается известными уравнениями Навье – Стокса, неразрывности, энергии и состояния [23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j E)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i), \\ \tau_{ij} &= \mu \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right]. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $v$  – скорость с  $u = v_1, v = v_2, w = v_3$  в  $x = x_1, y = x_2, z = x_3$  – направлениях;  $p, \rho, T$  – давление, плотность и температура;  $\mu = \mu_r \left( \frac{T}{T_r} \right)^{3/2} \frac{T_r + T_s}{T + T_s}$  – динамическая вязкость;  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении. Теплопроводность принималась в соответствии с кинетической теорией, температура основного потока  $T_r = 164$  °К,  $T_s = 110$  °К, скорость набегающего потока  $U_\infty \approx 500$  м/с, давление 6000 Па, что соответствовало единичному числу Рейнольдса  $Re_1 = (U\rho/\mu)_\infty = 6,5 \cdot 10^6/m$ .

Расчетная область схематично представлена на рис. 1.  $A'D'BC$  – пластина с источником возмущения. Длина пластины равнялась 140 мм, перед пластиной задавалась полоса шириной  $AA' = 5$  мм. На пластине задавались условия адиабатической стенки. Высота расчетной области соответствовала примерно 20 мм, и на верхней границе (EFGH) задавались неотражающие граничные условия. Ширина расчетной области AD принималась равной 40 мм и была достаточной, чтобы возмущения от источника, расположенного на расстоянии 30 мм от передней кромки пластины, не достигали боковых стенок. Граничные условия задавались на входе (AEFD) и выходе (BCGH).

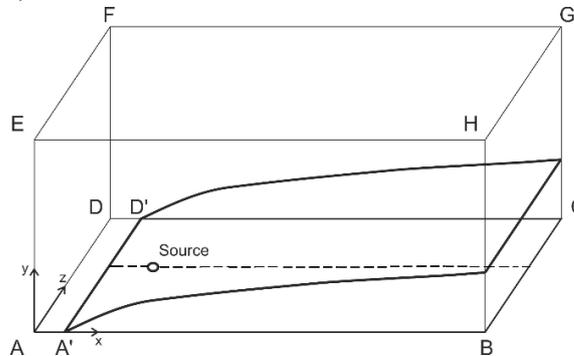


Рис. 1. Расчетная область  
Fig. 1. Calculation domain

В расчетной области была построена структурированная сетка со сгущением по координате  $y$  вблизи пластины. Количество ячеек по  $x$  было равно 750, по  $z$  – 200 и по  $y$  – 400. Расчеты проведены программным комплексом ANSYS.

Задача решалась в два этапа. На первом этапе решалась стационарная задача. На втором этапе задача решалась при наличии локализованного возмущения, которое создавалось вдувом воздуха через отверстие диаметром 1 мм, расположенное по центру пластины. В течение первых нескольких микросекунд нормальная скорость над отверстием принималась равной 25 м/с, затем она принималась равной нулю на всей поверхности пластины. Длительность расчета равнялась 1000 мс, шаг по времени составлял  $10^{-2}$  мкс. Результаты, представленные в данной работе, получены при длительности вводимого импульса равного 25 мкс.

## 2. Обсуждение результатов

В результате расчетов были получены значения возмущений, зависящих от времени и координат.

Как численно, так и экспериментально [20] было получено, что максимальные возмущения наблюдаются при  $y_{\max}$ , где безразмерный массовый поток основного течения  $\rho U(y)/(\rho U)_{\infty} \approx 0,6 - 0,8$ . Ниже будут приведены результаты расчетов возмущений массового потока только при  $y_{\max}$ . На рис. 2 представлена типичная картина волнового пакета длительностью 25 мкс, полученного в результате численного моделирования (рис. 2, а) и эксперимента (рис. 2, б) выполненных при идентичных параметрах. Некоторое расхождение контуров возмущения обусловлено в первую очередь на порядок большим возмущением в эксперименте и как следствие нелинейными процессами.

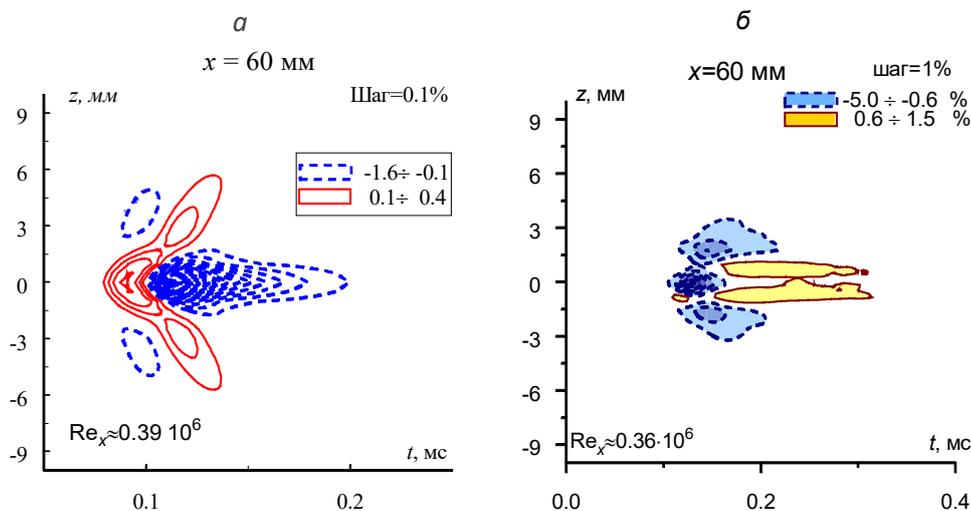


Рис. 2. Изолинии пульсаций массового потока волнового пакета в плоскости  $(z, t)$ :

а – ПЧМ ( $Re_x = 0,39 \cdot 10^6$ ); б – эксперимент [20] ( $Re_x = 0,36 \cdot 10^6$ )

Fig. 2. Mass flux pulsations isolines of the wave packet in the  $(z, t)$  plane:

а – numerical simulation ( $Re_x = 0.39 \cdot 10^6$ ); б – experimental data ( $Re_x = 0.36 \cdot 10^6$ )

Зависимости возмущений потока массы от времени при  $z = 0$  и двух значениях продольной координаты представлены на рис. 3:  $x = 60$  мм ( $Re_x = xRe_1 = 0,39 \cdot 10^6$ );  $x = 100$  мм ( $Re_x = 0,65 \cdot 10^6$ ). Видно, что суммарная интенсивность возмущений уменьшается с ростом продольной координаты. В то же время, по мере движения волнового пакета вниз по потоку, в области переднего фронта возникают колебания, амплитуда которых растет со временем.

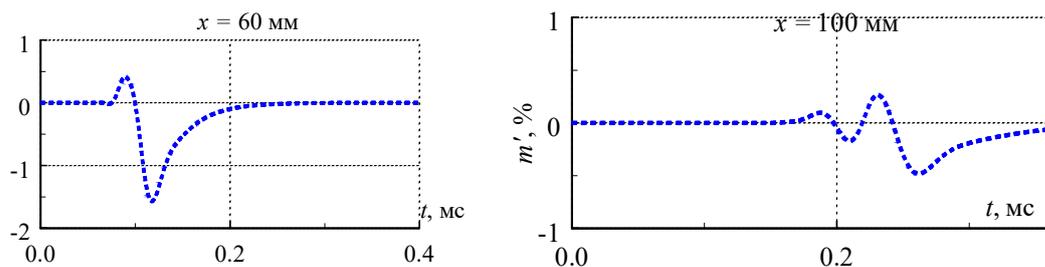


Рис. 3. Зависимость возмущений потока массы от времени при  $z = 0$  на двух расстояниях от передней кромки пластины:  $x = 60$  и  $100$  мм

Fig. 3. Time dependence of mass flux perturbations at  $z = 0$  on two distances from the plate leading edge:  $x = 60$  and  $100$  mm

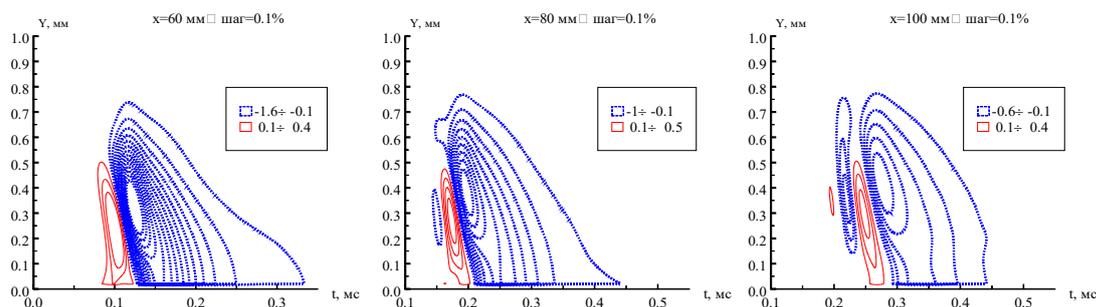


Рис. 4. Волновой пакет массового потока в плоскости  $(y, t)$  при  $z = 0$  и  $x = (60, 80, 100)$  мм

Fig. 4. Mass flux wave packet in the  $(y, t)$  plane at  $z = 0$  and  $x = (60, 80, 100)$  mm

На рис. 4 показано изменение формы волнового пакета в плоскости  $(y, t)$  с перемещением вниз по течению при  $z = 0$ . Максимальное отклонение от основного течения при всех значениях  $x$  находится примерно при  $y \approx 0,4$  мм, что соответствует, примерно третьей части толщины пограничного слоя или, как было сказано выше, положению, где относительный массовый поток основного течения составляет значение примерно равное  $0,7$ . Весь пакет занимает примерно  $2/3$  толщины слоя. По мере смещения пакета вниз по течению увеличивается число превышений и дефектов массового потока относительно основного течения.

На рис. 5 показана динамика волнового потока при его перемещении вниз по потоку. При перемещении низ по течению ширина волнового пакета расширяется, число максимумов и дефектов массового потока увеличивается, аналогично тому, что наблюдается и в плоскости  $(y, t)$ .

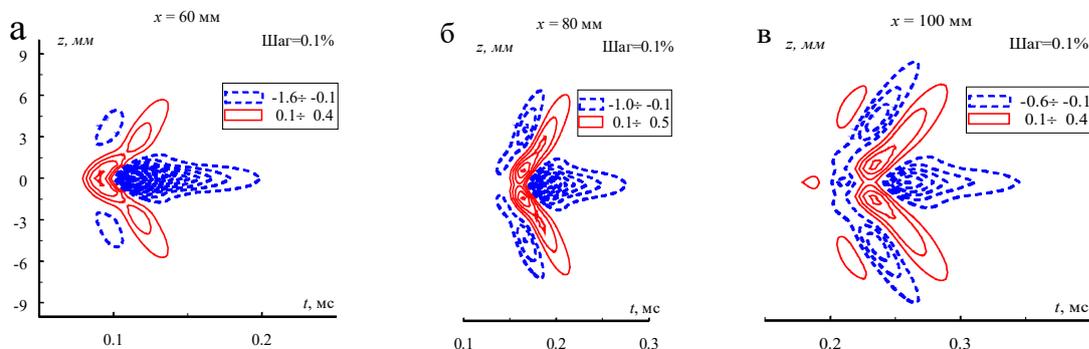


Рис. 5. Волновой пакет массового потока в плоскости  $(z, t)$  при  $x = [60 (а), 80 (б), 100 (в)]$  мм

Fig. 5. Mass flux wave packet in the  $(z, t)$  plane at  $x = [60 (а), 80 (б), 100 (в)]$  mm

Для сопоставления результатов прямого численного моделирования с линейной теорией гидродинамической устойчивости необходимы данные о развитии возмущений заданной частоты. С этой целью волновой пакет массового потока, при фиксированных  $y_{max}$  и  $x$ , раскладывался в спектр по частотам и боковым волновым числам в соответствии с преобразованием:

$$A_{f\beta}(x) = A_{f\beta}(x, y_{max}) \exp(i\Phi_{f\beta}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m'(x, y_{max}, t, z) e^{-i(\beta z - 2\pi ft)} dt dz.$$

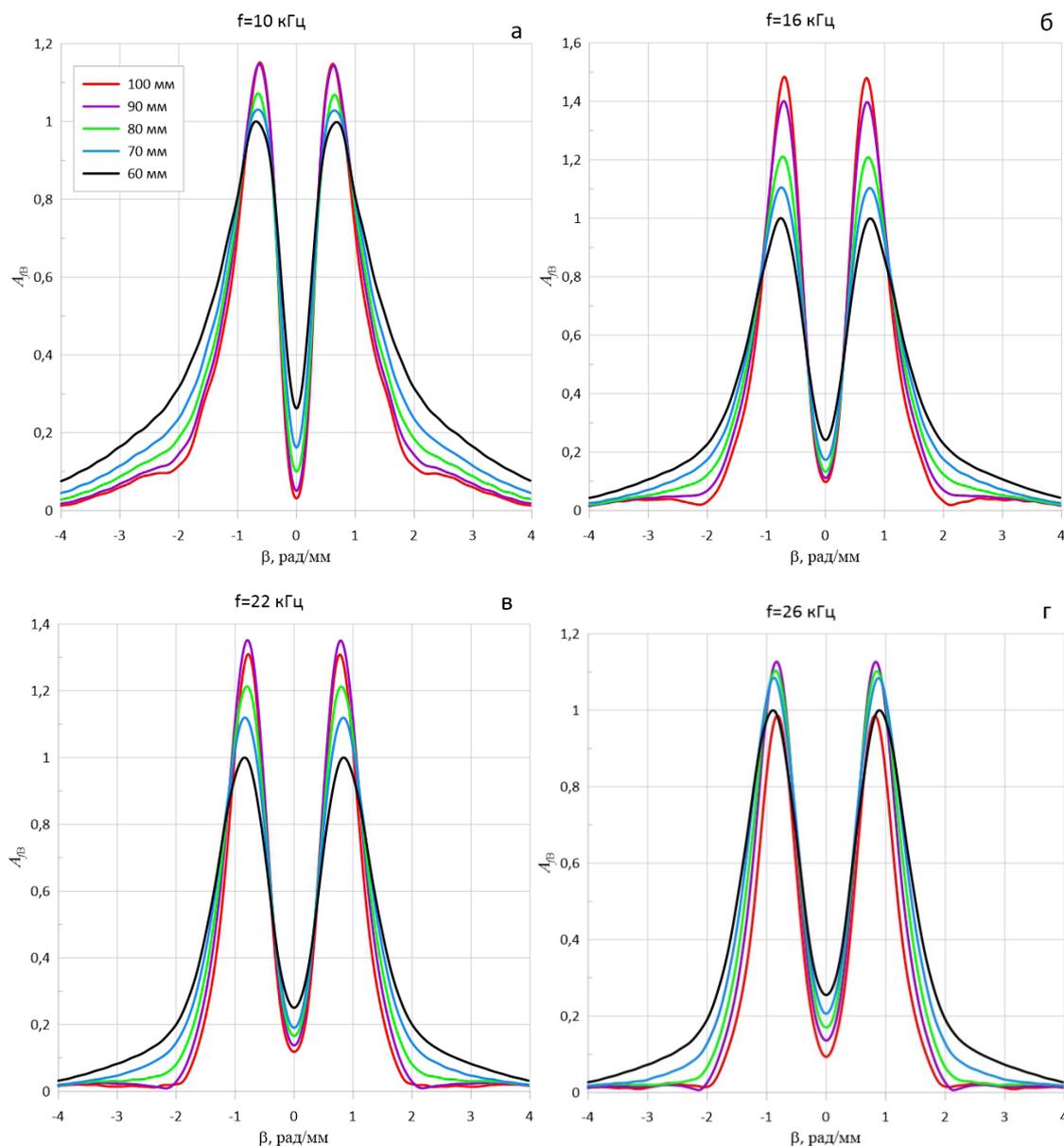


Рис. 6. Амплитудные  $\beta$ -спектры на разных расстояниях от передней кромки пластина на частотах: 10, 16, 22 и 26 кГц

Fig. 6. Amplitude  $\beta$ -spectra at different distances from the plate leading edge at frequencies: 10, 16, 22 and 26 kHz

На рис. 6 показаны амплитудные спектры по волновым числам для четырех частот:  $f = 10, 16, 22$  и  $26$  кГц. Можно заметить, что максимальное значение амплитуды соответствует волно-

вому числу  $\beta \approx 1$  рад/мм. Кроме того, было получено, что при принятых параметрах расчетов максимальное значение достигается при  $x = 100$  мм для частоты  $f = 16$  кГц. При  $10 < f < 16$  кГц возмущения с  $\beta \approx 1$  рад/мм растут с увеличением  $x$ . В области  $f > 22$  кГц соответствующие возмущения имеют максимумы в интервале  $x < 100$  мм. Это означает, что исследованные низкие частоты,  $f = 10$  и  $16$  кГц, в диапазоне  $x < 100$  мм принадлежит внутренней (неустойчивой) области нейтральной кривой. Высокие частоты,  $f = 22$  и  $26$  кГц, при  $x > 100$  мм находятся во внешней (устойчивой) области нейтральной кривой, выше верхней ветви кривой.

По зависимости фазы от продольных координат можно определить волновое число  $\alpha_r$  в направлении  $x$  и угол между направлением основного потока и вектором  $\mathbf{k} = \alpha_r i_x + \beta i_z$ , где  $i_x$ ,  $i_z$  – единичные векторы координат. Соответствующий пересчет результатов для  $f = 16$  и  $22$  кГц показан на рис. 7, где  $\kappa = \text{arctg}(\beta/\alpha_r)$ . Как видно, наибольшие амплитуды возмущений соответствуют углам  $\kappa \approx 60^\circ$ .

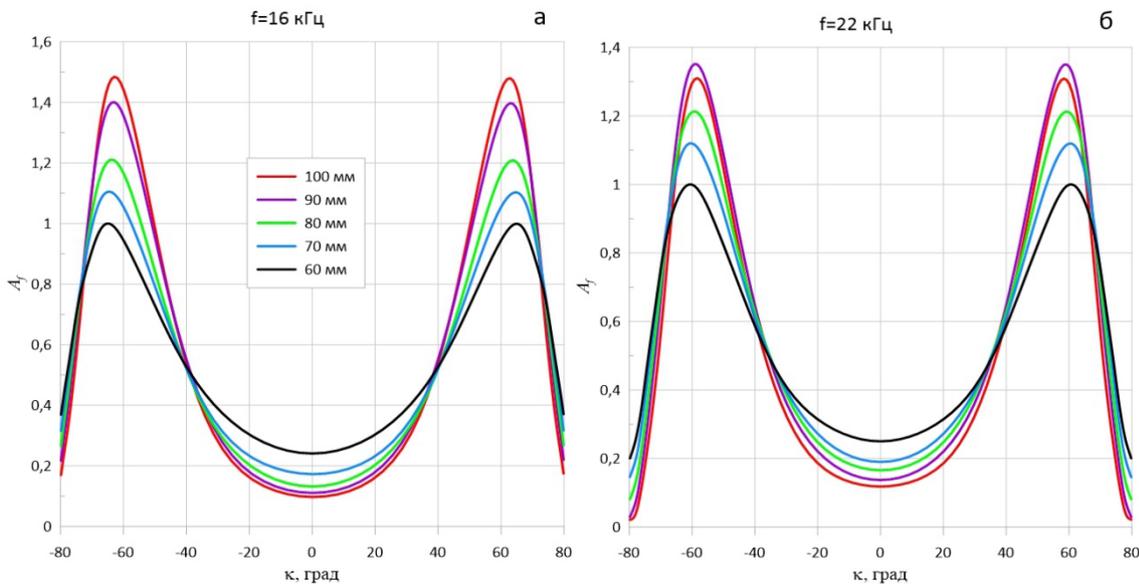


Рис. 7. Зависимости амплитуд от угла наклона волны на разных расстояниях от передней кромки пластина для двух частот: 16, 22 кГц

Fig. 7. Dependences of amplitudes on the wave inclination angle at different distances from the plate leading edge for two frequencies: 16, 22 kHz

Зависимость амплитуды от продольной координаты, при фиксированном значении  $\beta$  позволяет вычислить пространственный инкремент  $-\alpha_i = \frac{d \ln(A_{\beta f})}{dx}$  соответствующей волны.

Можно показать, что при  $x = 65$  мм,  $\beta = 0,8/\text{мм}$  и  $f = 16$  кГц степень усиления  $-\alpha_i \approx 9,5/\text{м}$ , а угол  $\kappa = 65^\circ$ . Полученный коэффициент усиления близок к значению  $-\alpha_i = 9,1/\text{м}$  теории устойчивости параллельных течений, а угол наклона волнового вектора к направлению основного течения находится в полном соответствии с теорией,  $\kappa = 65^\circ$ . Кроме того, при  $\kappa \approx 40$  и  $75$  градусов возмущения практически не растут при всех значениях координаты  $x$ . Данные при  $\kappa \approx 75^\circ$  находятся в полном соответствии с теорией устойчивости параллельных течений. Что касается  $\kappa \approx 40^\circ$ , то в теории соответствующие волны нарастают, хотя и с меньшим темпом,  $-\alpha_i \approx 7,8/\text{м}$ , в сравнении с  $-\alpha_i = 9,1/\text{м}$  при  $\kappa = 65^\circ$ . В большой степени несоответствие теории устойчивости параллельных течений и численным моделированием локализованного возмущения имеет место относительно двумерных возмущений,  $\beta = \kappa = 0$ . Например, согласно приведенным данным, при  $f = 16$  кГц (рис. 8) возмущение с углами  $\kappa = 0$  на расстоянии  $x = 65$  мм затухает

( $-\alpha_i \approx -30/\text{м}$ ), в то время как, согласно теории устойчивости параллельных течений, они должны нарастать ( $-\alpha_i \approx 4,4/\text{м}$ ). Причина такого несоответствия может заключаться в нелинейном влиянии волн с большими амплитудами ( $\chi = 65^\circ$ ) на волны малых амплитуд ( $\chi \approx 0$ ). По-видимому, имеет место перекачка энергии двумерных возмущений в трехмерные волны, в том числе в волны других частот.

### Заключение

Проведено прямое численное моделирование развития волнового пакета малой интенсивности при сверхзвуковом обтекании пластины при числе Маха  $M = 2$ .

Как и в [20] установлено, что местоположение максимальных возмущений массового потока находятся на расстоянии в положении, где безразмерный массовый поток основного потока  $\rho U(y)/(\rho U)_\infty \approx 0,6-0,8$ .

По мере движения волнового пакета вниз по течению общая амплитуда возмущения уменьшается, и в нем наблюдаются осцилляции.

Максимальный вклад в суммарное возмущение принадлежит волнам с волновыми числами  $\beta \approx 0,8/\text{мм}$ , что соответствует углу наклона волнового вектора к передней кромке пластины примерно  $65^\circ$ .

Полученные пространственные скорости усиления косой волны с большими углами наклона фронта волны относительно передней кромки пластины находятся в хорошем соответствии с данными теории устойчивости локально параллельных потоков. С уменьшением угла наклона волны соответствие теории устойчивости с данными, полученными на основании численного моделирования развития локализованного возмущения, нарушается, особенно это касается двумерных волн, углы наклона которых равны нулю. По-видимому, имеет место перекачка энергии (в результате нелинейного взаимодействия) двумерных возмущений в трехмерные волны, в том числе в волны других частот. Проблема нелинейного развития волн в локализованном возмущении и перехода последнего в турбулентное пятно нуждается в специальном исследовании.

### Список литературы

1. **Emmons H. W.** The laminar-turbulent transition in a boundary layer - part 1 // Journal of the Aerospace Sciences. 1951. Vol. 19. P. 490–498. DOI:10.2514/8.2010
2. **Narasimha R.** The laminar-turbulent transition zone in the boundary layer // Progress in Aerospace Sciences. 1985. Vol. 22. P. 29–80. DOI:10.1016/0376-0421(85)90004-1
3. **Mitchner M.** Propagation of turbulence from an instantaneous point disturbance // Journal of the Aeronautical Sciences. 1954. Vol. 21, No. 5. P. 350–351. (1954). Propagation of Turbulence from an Instantaneous Point Disturbance. Journal of the Aeronautical Sciences, 21(5), 350–351.
4. **Schubauer G. B., Klebanoff P. S.** Contributions to the mechanics of boundary-layer transition // NACA TN-3489. NACA. 1955.
5. **Gaster M., Grant I.** An Experimental Investigation of the formation and development of a wave packet in a laminar boundary layer // Proc. Roy. Soc. 1975. A 347. P. 253–269. DOI:10.1098/rspa.1975.0208
6. **Gaster M.** A theoretical model of a wave packet in the boundary layer on a flat plate // Proc. Roy. Soc. 1975. Vol. A347. P. 271–289. DOI: 10.1098/rspa.1975.0209
7. **Riley J. J., Gad-el-Hak M.** The dynamics of turbulent spots // In Frontiers in Fluid Mechanics, Springer. 1985. P. 123–155. DOI: 10.1088/1742-6596/318/3/032028.
8. **Elder J. W.** An experimental investigation of turbulent spots and breakdown to turbulence // J. Fluid Mech. 1960. Vol. 9. P. 235–246.
9. **Cantwell B., Coles D., Dimotakis P.** Structure and entrainment in the plane of symmetry of a turbulent Spot // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 87. P. 641–672. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112060001079>

10. **Gad-el-Hak M., Blackwelder R. F., Riley, J. J.** On the growth of turbulent regions in laminar boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1981. Vol. 110. P. 73–95. DOI: <https://doi.org/10.1017/S002211208100061X>
11. **Бойко А. В., Грек Г. Р., Довгаль А. В., Козлов В. В.** Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. НИЦ «РХД». 2006. 304 с.
12. **Reddy S. C. and Henningson D. S.** Energy growth in viscous channel flows // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol. 252. P. 209–238. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112093003738>
13. **Grosch C. E., Salwen H.** The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation, Part 1, The spectrum and the eigenfunctions // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 87. P. 33–54. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112078002918>
14. **Grosch C. E., Salwen H.** The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation, Part 2, Eigenfunction expansions // *J. Fluid Mech.* 1981. Vol. 104. P. 445–465.
15. **Libby P. A., Fox H.** Some perturbation solutions in laminar boundary layer theory. Part 1. The momentum equation // *J. Fluid Mech.* 1963. Vol. 17, No. 3. P. 433–449. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112081002991>
16. **Gaponov S. A.** Quasi-resonance excitation of stationary disturbances in compressible boundary layers // *International Journal of Mechanics.* 2017. Vol. 11. P. 120–127.
17. **James C. S.** Observations of turbulent-burst geometry and growth in supersonic flow // NACA-TN-4235. NACA. 1958. 19930085190.pdf
18. **Krishnan L., Sandham N. D.** Effect of Mach number on the structure of turbulent spots // *J. Fluid Mech.* 2006. Vol. 566. P. 225–234. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112006002412>
19. **Jewell J. S., Leyva I. A., Shepherd J. E.** Turbulent spots in hypervelocity flow // *Exp Fluids.* 2017. 58:32. DOI: 10.1007/s00348-017-2317-y. DOI: 10.1007/s00348-017-2317-y
20. **Yatskikh A. A., Ermolaev Y. G., Kosinov A. D., Semionov N. V.** Hot-wire visualization of the evolution of localized wave packets in a supersonic flat-plate boundary layer // *Journal of Visualization.* 2017. Vol. 20, No. 3. P. 549–557. 10.1007/s12650-016-0414....
21. **Krishnan L., Sandham N. D.** Effect of Mach number on the structure of turbulent spots // *J. Fluid Mech.* 2006. Vol. 566. P. 225–234. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112006002412>
22. **Sivasubramanian J., Fasel H. F.** Direct numerical simulation of a turbulent spot in a cone boundary layer at Mach 6 // *AIAA Paper.* 2010. 2010–4599. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2010-4599>
23. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
24. **Dunn D. W., Lin C. C.** On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid // *J. Aeronaut. Sci.* 1955. Vol. 22, No. 7. P. 455–477. [doi.org/10.1142/9789814415651\\_0005](https://doi.org/10.1142/9789814415651_0005)

## References

1. **Emmons H. W.** The laminar-turbulent transition in a boundary layer – part 1. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1951, vol. 19, pp. 490–498. <https://doi.org/10.2514/8.2010>
2. **Narasimha R.** The laminar-turbulent transition zone in the boundary layer. *Progress in Aerospace Sciences*, 1985, vol. 22, pp. 29–80. [https://doi.org/10.1016/0376-0421\(85\)90004-1](https://doi.org/10.1016/0376-0421(85)90004-1)
3. **Mitchner M.** Propagation of turbulence from an instantaneous point disturbance. *Journal of the Aeronautical Science*, 1954, vol. 21, no. 5, pp. 350–351.
4. **Schubauer G. B., Klebanoff P. S.** Contributions to the mechanics of boundary-layer transition. *NACA TN-3489*. NACA, 1955, 32p.
5. **Gaster M., Grant I.** An Experimental Investigation of the formation and development of a wave packet in a laminar boundary layer. *Proc. Roy. Soc.*, 1975, A 347, pp. 253–269. <https://doi.org/10.1098/rspa.1975.0208>
6. **Gaster M.** A theoretical model of a wave packet in the boundary layer on a flat plate. *Proc. Roy. Soc.*, 1975, vol. A347, pp. 271–289. <https://doi.org/10.1098/rspa.1975.0209>

7. **Riley J. J., Gad-el-Hak M.** The dynamics of turbulent spots. *In Frontiers in Fluid Mechanics*. Springer, 1985, pp. 123–155.
8. **Elder J. W.** An experimental investigation of turbulent spots and breakdown to turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1960, vol. 9, pp. 235–246. <https://doi.org/10.1017/S0022112060001079>
9. **Cantwell B., Coles D., Dimotakis P.** Structure and entrainment in the plane of symmetry of a turbulent spot. *J. Fluid Mech.*, 1978, vol. 87, pp. 641–672. <https://doi.org/10.1017/S0022112078001809>
10. **Gad-el-Hak M., Blackwelder R. F., Riley J. J.** On the growth of turbulent regions in laminar boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 110, pp. 73–95.
11. **Boiko A. V., Dovgal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V.** Physics of transitional shear flows: instability and laminar – turbulent transition in incompressible near – wall shear layers. –Dordrecht et al.: Springer, 2012. XXVII, 271 p.
12. **Reddy S. C., Henningson D. S.** Energy growth in viscous channel flows. *J. Fluid Mech.*, 1993, vol. 252, pp. 209–238. <https://doi.org/10.1017/S0022112093003738>
13. **Grosch C. E., Salwen H.** The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation, Part 1, The spectrum and the eigenfunctions. *J. Fluid Mech.*, 1978, vol. 87, pp. 33–54. <https://doi.org/10.1017/S0022112078002918>
14. **Grosch C. E., Salwen H.** The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation, Part 2, Eigenfunction expansions. *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 104, pp. 445–465. <https://doi.org/10.1017/S0022112081002991>
15. **Libby P. A., Fox H.** Some perturbation solutions in laminar boundary layer theory, Part 1, The momentum equation. *J. Fluid Mech.*, 1963, vol. 17, no. 3, pp. 433–449. <https://doi.org/10.1017/S0022112063001439>
16. **Gaponov S. A.** Quasi-resonance excitation of stationary disturbances in compressible boundary layers. *International Journal of Mechanics*, 2017, vol. 11, pp. 120–127.
17. **James C. S.** Observations of turbulent-burst geometry and growth in supersonic flow. *NACA-TN-4235*. NACA. 1958. 19930085190.pdf
18. **Krishnan L., Sandham N. D.** Effect of Mach number on the structure of turbulent spots. *J. Fluid Mech.* 2006. Vol. 566 P. 225–234. <https://doi.org/10.1017/S0022112006002412>
19. **Jewell J. S., Leyva I. A., Shepherd J. E.** Turbulent spots in hypervelocity flow. *Exp. Fluids*. 2017. Vol. 58, article number 32. DOI 10.1007/s00348-017-2317-y.
20. **Yatskikh A. A., Ermolaev Y. G., Kosinov A. D., Semionov N. V.** Hot-wire visualization of the evolution of localized wave packets in a supersonic flat-plate boundary layer. *Journal of Visualization*, 2017, vol. 20, no. 3, pp. 549–557. <https://doi.org/10.1007/s12650-016-0414-2>
21. **Krishnan L. and Sandham N. D.** Effect of Mach number on the structure of turbulent spots. *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 566, pp. 225–234. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112006002412>
22. **Sivasubramanian J., Fasel H. F.** Direct numerical simulation of a turbulent spot in a cone boundary layer at Mach 6. *AIAA Paper 2010–4599*. 2010. <https://doi.org/10.2514/6.2010-4599>
23. **Loytsyansky L. G.** Mechanics of fluid and gas. Moscow, Science, 1970. (in Russ.)
24. **Dunn D. W., Lin C. C.** On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. *J. Aeronaut. Sci.*, 1955, vol. 22, no. 7, pp. 455–477. [doi.org/10.1142/9789814415651\\_0005](https://doi.org/10.1142/9789814415651_0005)

### Сведения об авторах

**Гапонов Сергей Александрович**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник

**Семенов Александр Николаевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

**Яцких Алексей Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

### **Information about the Authors**

**Sergey A. Gaponov**, Doctor of Physical and Mathematical Science

**Alexander N. Semenov**, Candidate of Physical and Mathematical Science

**Alexey A. Yatskikh**, Candidate of Physical and Mathematical Science

*Статья поступила в редакцию 28.10.2024;  
одобрена после рецензирования 28.11.2024; принята к публикации 28.11.2024*

*The article was submitted 28.10.2024;  
approved after reviewing 28.11.2024; accepted for publication 28.11.2024*

Научная статья

УДК 533.6.04, 533.694

DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-20-27

## Управление аэродинамическими характеристиками вариоформного секционного крыла

Алексей Владимирович Крюков<sup>a,1,2</sup>, Илья Дмитриевич Зверков<sup>b,1,2</sup>  
Вячеслав Павлович Чехов<sup>c,1</sup>, Даниил Александрович Матвеев<sup>d,2</sup>  
Александр Андреевич Мешков<sup>f,2</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН  
Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет  
Новосибирск, Россия

<sup>a</sup>kryukov@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4874-9152>

<sup>b</sup>zverkov@itam.nsc.ru

<sup>c</sup>chekhov\_vp@itam.nsc.ru

<sup>d</sup>danya.matveev.00@yandex.ru

<sup>f</sup>alexandermeshkov@mail.ru

### Аннотация

В рамках работы представлена концепция использования специальной системы в качестве несущей поверхности летательных аппаратов новых типов. В основе концепции лежит использование разработанного и запатентованного авторами устройства – вариоформно-секционного крыла (ВФС-крыла). Эта несущая поверхность состоит из жесткого несущего каркаса и с гибкими силовыми элементами и эластичной обшивкой. С одной стороны, конструкция устройства позволяет организовать управление как течением на поверхности крыла, благодаря чему значительно улучшаются аэродинамические характеристики области критических углов атаки. С другой стороны, система позволяет управлять отклонением траектории аппарата путем изменения распределения давления на несущей поверхности. При этом летательный аппарат не нуждается в классических шарнирно-секционных рулевых элементах и сопряженных с ними системах приводов и агрегатов. В данной публикации продемонстрированы теоретические и экспериментальные данные, подтверждающие эффективность предложенных методов.

### Ключевые слова

самолет, адаптивное крыло, несущая поверхность, волнистое крыло, вариоформно-секционное крыло, ВФС-крыло, ламинарно-турбулентный переход, управление полетом, срыв потока, морфное крыло

### Финансирование

Работа поддержана грантом РФФ 24-29-00329.

### Для цитирования

Крюков А. В., Зверков И. Д., Чехов В. П., Матвеев Д. А., Мешков А. А. Управление аэродинамическими характеристиками вариоформного секционного крыла // Сибирский физический журнал. 2025. Т. 20, № 1. С. 20–27. DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-20-27

© Крюков А. В., Зверков И. Д., Чехов В. П., Матвеев Д. А., Мешков А. А., 2025

ISSN 2541-9447

Сибирский физический журнал. 2025. Том 20, № 1

Siberian Journal of Physics, 2025, vol. 20, no. 1

# Control of Aerodynamic Characteristics of a Varioform Sectional Wing

Alexey V. Kryukov<sup>a,1,2</sup>, Ilya D. Zverkov<sup>b,1,2</sup>, Vycheslav P. Chekhov<sup>c,1</sup>  
Daniil A. Matveev<sup>d,2</sup>, Alexander A. Meshkov<sup>f,2</sup>

<sup>1</sup>Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS  
Novosibirsk, Russian Federation

<sup>2</sup>Novosibirsk State Technical University,  
Novosibirsk, Russian Federation

<sup>a</sup>kryukov@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4874-9152>

<sup>b</sup>zverkov@itam.nsc.ru

<sup>c</sup>chekhov\_vp@itam.nsc.ru

<sup>d</sup>danya.matveev.00@yandex.ru

<sup>f</sup>alexandermeshkov@mail.ru

## Abstract

Within the framework of this work the concept of using a special system as a bearing surface of new types of aircraft is presented. The concept is based on the use of the varioform-sectional wing (VFS wing) device developed and patented by the authors. This bearing surface consists of a rigid bearing frame and with flexible force elements and elastic cladding. On the one hand, the design of the device allows you to organize the control as a current on the surface of the wing due to what significantly improves aerodynamic performance in the area of critical angles of attack. On the other hand, the system allows to control the deflection of the vehicle trajectory by changing the pressure distribution on the carrier surface. In this case, the aircraft does not need classical articulated-section steering elements and associated drive systems and units. This publication demonstrates theoretical and experimental data confirming the effectiveness of the proposed methods.

## Keywords

Airplane, adaptive wing, bearing surface; undulating wing, varioform-sectional wing, VFS wing, laminar-turbulent transition, flight control, flow stall, morphing wing

## Acknowledgements

The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation RSF 24-29-00329

## For citation

Kryukov A. V., Zverkov I. D., Chekhov V. P., Matveev D. A., Meshkov A. A. Control of aerodynamic characteristics of a varioform sectional wing. *Siberian Journal of Physics*, 2025, vol. 20, no. 1, p. 20–27. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-20-27

В настоящее время достаточно динамично развивается концепция создания адаптивных и морфных летательных аппаратов [1]. Наиболее актуально это для аппаратов длительного нахождения в воздухе, предназначенных для мониторинга и ретрансляции сигналов так называемой концепции высотных псевдоспутников HAPS [2]. Прежде всего это вызвано необходимостью уменьшения аэродинамического сопротивления, а также сохранения работоспособности органов управления в условиях изменяемой геометрии несущих поверхностей. В данной работе предлагается своя концепция адаптивного летательного аппарата на основе разработанного ВФС-крыла [3–5]. Кроме общего изменения формы, на такой поверхности используются также эффекты волнистого крыла, значительно улучшающего характеристики в области критических углов атаки и, как следствие, безопасность полета [6–10]. В основе концепции ВФС-крыла лежит использование специальной конструкции, состоящей из жесткого несущего каркаса и герметичных секторов с эластичной обшивкой. При этом управление аэродинамическими характеристиками такого аппарата происходит за счет общего изменения внешней формы и, как следствие, распределения давления на поверхности. Данный тип несущей поверхности состоит из жесткого основания «1», формообразующих упругих нервюр «2» с ограничивающими гибкими проницаемыми вставками «3» и эластичной обшивки «4», способной растягиваться в межсекционных областях с образованием горбов и впадин (рис. 1). При создании внутри изолированной секции избыточного к атмосферному давлению  $P_1$  по-

верхность принимает форму, близкую геометрии образующих нервюр (рис. 1, *a*). При дальнейшем увеличении давления до  $P_2$  на поверхности образуются продольные потоку горбы (рис. 1, *b*), изменяющие не только само распределение давления на поверхности, но и развитие отрывных и переходных процессов течения. Создание недостаточного к атмосферному давления  $P_3$  внутри секции вынуждает обшивку вместе с гибкими нервюрами примыкать к жесткому основанию «1», принимая его форму (рис. 1, *c*). Таким образом, создавая необходимое изменение формы в определенном месте, можно осуществлять управление летательным аппаратом в целом. Работа состояла из двух частей. Первым этапом была выполнена оценочная часть работы, предназначенная для оптимизации геометрии элементов экспериментальной модели ВФС-крыла для последующего его изготовления. В качестве инструмента оптимизации формы профиля жесткого основания «1» и формообразующих нервюр «2» (см. рис. 1.) была использована программа X-foil [11]. Целью оптимизации было достижение наибольшей разницы в коэффициенте подъемной силы в предельных случаях изменения геометрии «а», «b» и «с» (рис. 1). В результате оптимизации были получены параметры формы жестких и упругих элементов ВФС-крыла (рис. 2). Следующим этапом работ был выполнен аэродинамический эксперимент в трубе Т-324 ИТПМ СО РАН. Данные собирались с помощью АЦП с 6-компонентных тензометрических аэродинамических весов (рис. 3, 4) с вантовым креплением модели с накоплением и последующей обработкой на ПК.

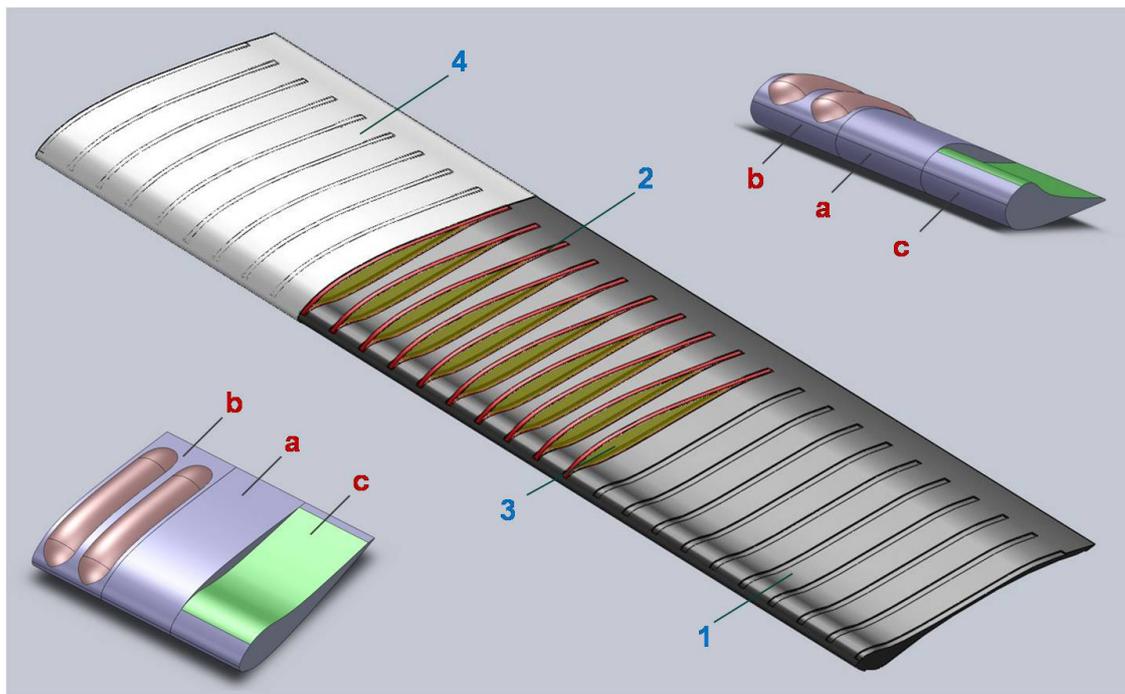


Рис. 1. ВФС-крыло: 1 – жесткое основание; 2 – наружные части нервюр; 3 – гибкая формообразующая вставка; 4 – эластичная обшивка.

Различные случаи формирования обшивки в зависимости от внутрисекционного давления: *a* – формирование обшивки в пределах ограничивающих нервюр с помощью избыточного давления  $P_1 = 200$  Па; *b* – формирование обшивки с внешними горбами с помощью избыточного давления  $P_2 = 1000$  Па; *c* – формирование обшивки на жестком основании путем создания недостаточного давления  $P_3 = -5000$  Па

Fig. 1. VFS wing: 1 – rigid base; 2 – outer parts of ribs; 3 – flexible forming insert; 4 – flexible skin.

Different cases of skin formation depending on the in-section pressure:

*a* – forming of the skin within the confining nervures by means of overpressure  $P_1 = 200$  Pa; *b* – formation of the skin with external humps by means of overpressure  $P_2 = 1000$  Pa; *c* – formation of the skin on a rigid base by means of creating insufficient pressure  $P_3 = -5000$  Pa

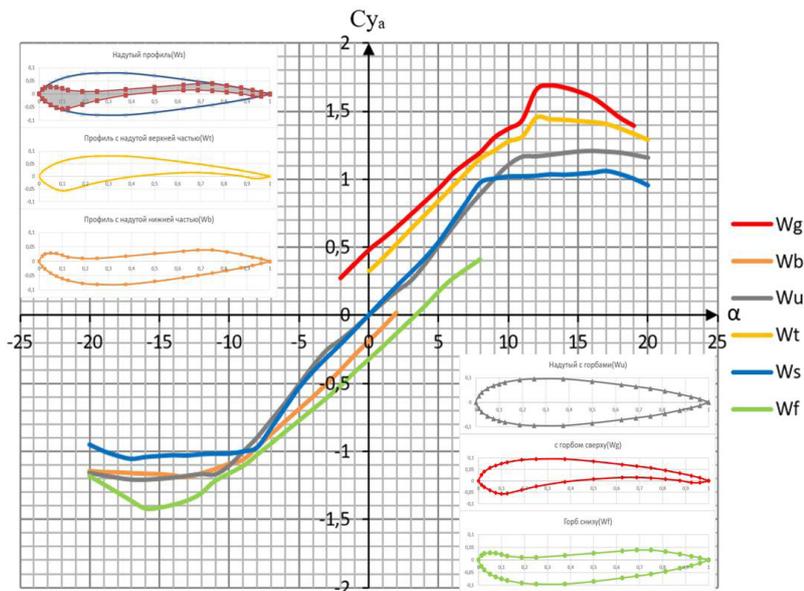


Рис. 2. Характеристики профилей для оптимизированной формы при различных конфигурациях управления геометрией ВФС-крыла, полученные в X-foil. Расчетные случаи «а», «b» и «с» соответствуют рис 1. Ws – верх (a), низ (a); Wt – верх (a), низ (c); Wb – верх (c), низ (a); Wu – верх (b), низ (b); Wg – верх (b), низ (c); Wf – верх (c), низ (b)

Fig. 2. Characteristics of profiles for the optimized shape at different configurations of control of VFS wing geometry obtained in X-foil. The calculated cases “a”, “b” and “c” correspond to Fig. 1. Ws – top (a) bottom (a); Wt – top (a) bottom (c); Wb – top (c) bottom (a); Wu – top (b) bottom (b); Wg – top (b) bottom (c); Wf – top (c) bottom (b)

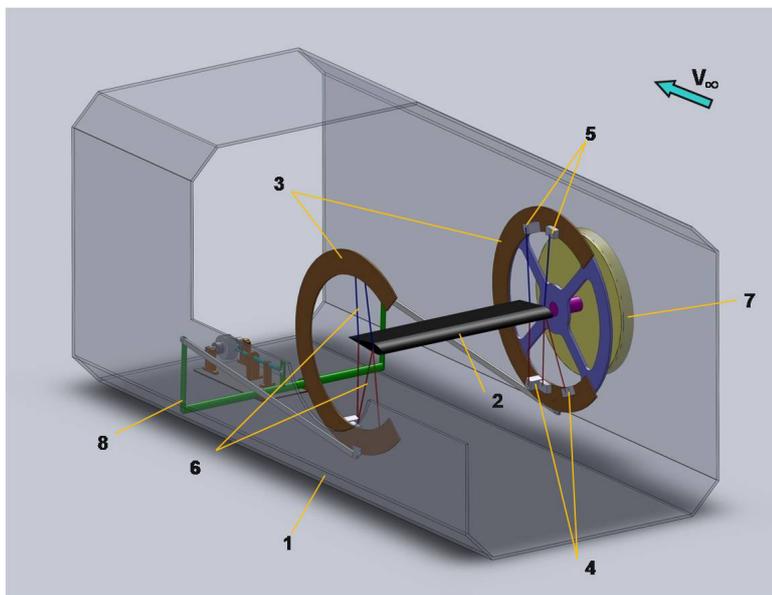


Рис. 3. Схема экспериментальной установки: 1 – рабочая часть трубы; 2 – модель крыла; 3 – подвижные подвесы; 4 – основные измерительные тензодатчики; 5 – компенсирующие измерительные тензодатчики; 6 – ванты крепления модели; 7 – заглушка смотрового окна с элементами крепления подвижного основания; 8 – механизм управления углом атаки

Fig. 3. Schematic diagram of the experimental setup: 1 – working part of the tube; 2 – wing model; 3 – movable hangers; 4 – main measuring strain gauges; 5 – compensating measuring strain gauges; 6 – model fastening cables; 7 – observation window plug with elements for fastening the movable base; 8 – angle of attack control mechanism

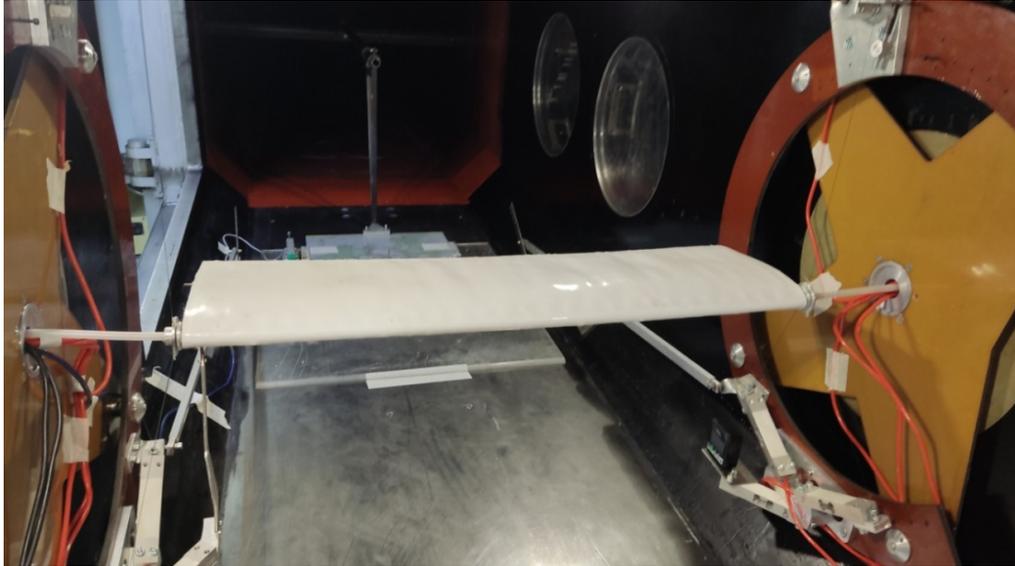


Рис. 4. Модель ВФС-крыла в рабочей части трубы. Рабочая часть трубы Т-324 ИТПМ СО РАН. Слева и справа подходят пневматические трассы для управления перепадом давления в нижнем и верхнем секторах  
 Fig. 4. Model of the VFS wing in the working part of the tube. The working part of the tube T-324 of ITPM SB RAS. On the left and right are suitable pneumatic traces for controlling the pressure drop in the lower and upper sectors

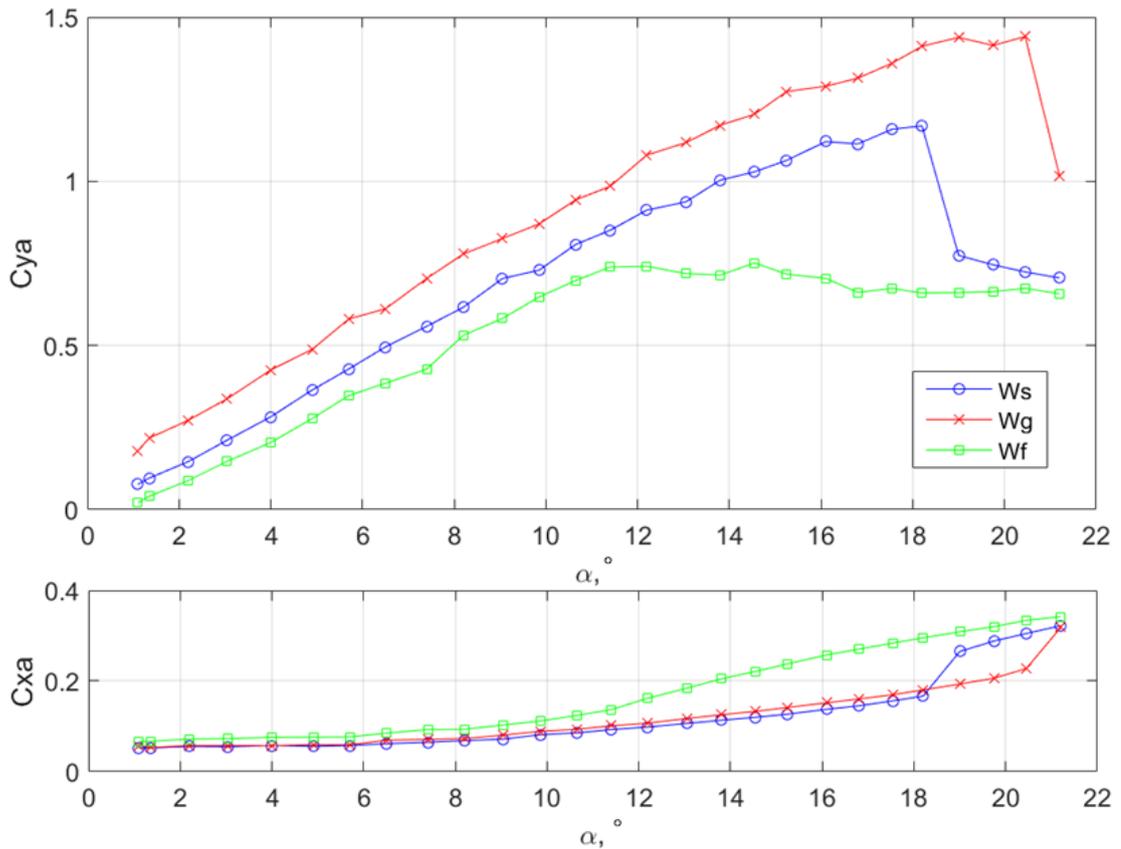


Рис. 5. График зависимости коэффициентов  $C_{y_a}$  и  $C_{x_a}$  от угла атаки  $\alpha$ ,  $V = 20$  м/с,  $Re = 250\,000$ , степень турбулентности потока  $Tu = 0,04\%$   
 Fig. 5. Graph of the dependence of the coefficients  $C_{y_a}$  and  $C_{x_a}$  on the angel of attack  $\alpha$ ,  $V = 20$  м/с,  $Re = 250,000$ , the level of flow turbulence  $Tu = 0,04\%$ .

Измерения проводились при скорости набегающего потока 20 м/с, степени турбулентности  $Tu = 0,04\%$  при углах атаки  $\alpha$  от 0 до  $+21^\circ$ . При этом избыточное к атмосферному давление  $P_1 = 200$  Па и  $P_2 = 1000$  Па создавалось с помощью компрессора, а недостаточное  $P_3 = -5000$  Па при помощи вакуумного насоса. После установления необходимой комбинации давлений в секторах ВФС-крыла производился автоматизированный сбор данных с помощью АЦП L-Card E14-440 и записи на ПК в заданном диапазоне изменения угла атаки.

Данные собирались в связанной с весами системе координат с дальнейшей обработкой и получением аэродинамических коэффициентов подъемной силы  $C_{y_a}$  и силы сопротивления  $C_{x_a}$  в скоростной системе координат (рис. 5).

На рис. 5 конфигурация  $Ws$  соответствует надуву давлением  $P_1$  верхнего и нижнего сектора при этом обшивка принимает форму ограничивающей нервюры.  $Wg$  соответствует надуву верхнего сектора давлением  $P_2$ , и созданию разрежению до  $P_3$  в нижнем секторе, при этом на верхней поверхности образуются выпуклые горбы.  $Wf$  соответствует надуву нижнего сектора давлением  $P_2$ , и разрежению верхнего сектора до  $P_3$ , при этом на нижней поверхности образуются выпуклые горбы (см. рис. 1).

На рис. 5 можно наблюдать, что при конфигурации  $Wg$  в области докритических углов атаки прирост коэффициента  $C_{y_a}$  составляет  $0,12 \pm 0,02$  по сравнению с изначальной конфигурацией  $Ws$ . В конфигурации  $Wf$  происходит уменьшение подъемной силы на величину  $0,08 \pm 0,02$  по отношению к исходной конфигурации. Таким образом, в области докритических углов атаки общая разница в  $C_{y_a}$  между предельными конфигурациями составляет  $0,2 \pm 0,02$ . Также по графикам можно наблюдать значительное изменение критических углов атаки в зависимости от конфигурации ВФС-крыла. В конфигурации  $Wg$  происходит рост критического угла атаки на  $3^\circ$  и коэффициента максимальной подъемной силы на 20 % от изначальной конфигурации. В случае  $Wf$  критический угол атаки уменьшается на  $6^\circ$  а коэффициент максимальной подъемной силы  $C_{y_a}$  падает на 40 %. В области докритических углов атаки сопротивление крыла значительно не меняется. Так как для случая  $Wf$  срыв потока начинается с  $\alpha = 12^\circ$ , то и с этого угла атаки наблюдается значительный рост сопротивления. Для конфигурации  $Wg$  значительный рост сопротивления начинается после  $\alpha = 21^\circ$ , что соответствует критическому углу атаки.

### Заключение

Оптимизация формы профиля модели позволила получить максимальные перепады коэффициента подъемной силы в рамках физически осуществимой геометрии. Однако совпадение прогнозируемого прироста подъемной силы по сравнению с экспериментом наблюдается только на качественном уровне. Более точную оценку изменения аэродинамических коэффициентов может дать моделирование обтекания в трехмерной постановке с учетом всей геометрии.

С точки зрения управления летательным аппаратом перепада коэффициента подъемной силы достаточно для управления по крену. Конфигурация при надутой верхней поверхности на обеих консолях крыла может выполнять роль закрылков во взлетной и посадочной конфигурациях полета. А сдутая на обеих консолях верхняя поверхность может выполнять функцию воздушного тормоза. Управляя разрежением верхней и нижней поверхности, можно изменять аэродинамическое сопротивление консолей крыла, осуществляя управление аппаратом по рысканию.

Эффективности данной опробованной конфигурации будет достаточно для управления полетом маломаневренного аппарата. В особенности это актуально для аппаратов мониторинга, патрулирования и ретрансляторов связи. Использование ВФС-крыла позволит создавать стратосферные самолеты с изменяемой геометрией.

### Список литературы

1. **Valasek J.** Morphing Aerospace Vehicles and Structures // *Morphing Aerospace Vehicles and Structures*. 2012. doi:10.1002/9781119964032
2. **Dantsker O. D., Haviland S. T., Allford R., Daley D., Danowsky B. P., Haplin D., Kendall G., Lisoski D. L., Liu Z. T., Mukherjee J., Peltz A., Price B., Sano G., Warner R. B. and Bershadsky D.** Flight Testing of Tailless Subs-scale HAPS Aircraft, *AIAA Paper 2023-3780*, AIAA Aviation Forum, Virtual Event, Jun. 2023.
3. **Зверков И. Д., Козлов В. В., Крюков А. В.** Способ управления аэродинамическими характеристиками несущей поверхности и несущая поверхность. Патент № 2412864C1 (RU) приоритет RU2009127202/11A от 14.07.2009.
4. **Zverkov I. D., Kryukov A. V. Evtushok G. Yu.** Methods of determining the boundary layer characteristics of the varioform section wing // *AIP Conference Proceedings*. 2027. 030097 (2018). DOI: 10.1063/1.5065191
5. **Kryukov A. V., Zverkov I. D., Chubrikov A. E., Kulikov V. V.** Morphine wing as the basis of the aircraft of the future // *AIP Conference Proceedings*. 2020. 2288. 030059. <https://doi.org/10.1063/5.0028416>.
6. **Зверков И. Д., Козлов В. В., Крюков А. В.** Исследование отрыва пограничного слоя на классическом и «волнистом» крыльях с помощью тепловизора // *Вестник НГУ. Серия: Физика*. 2010. Т. 5, вып. 3. С. 20–28.
7. **Зверков И. Д., Козлов В. В., Крюков А. В.** Влияние волнистости поверхности на структуру пограничного слоя и аэродинамические характеристики крыла конечного размаха // *Вестник НГУ. Серия: Физика*. 2011. Т. 6, вып. 2. С. 28–42.
8. **Зверков И. Д., Козлов В. В., Крюков А. В.** Особенности обтекания прямого и скользящего крыла конечного размаха с гладкой и волнистой поверхностью в области критических углов атаки // *Вестник НГУ. Серия: Физика*. 2012. Т. 7, вып. 4. С. 57–67.
9. **Zverkov I. D., Kozlov V. V., Kryukov A. V.** Prospects for research in the field of small-sized aircraft // *NSU Bulletin, Series: Physics*. 2014. Vol. 9, iss.2. P. 95–115.
10. **Zverkov I. D., Kryukov A. V.** Impact onto the boundary layer on the airfoil of a small-sized flying vehicle with the use of a wavy surface. Problems and prospects (review) // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62. No. 3. P. 180–198.
11. **Drela M.** XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils // *Conference on Low Reynolds Number Aerodynamics*. 1989. P. 1–12/ 1989. DOI:10.1007/978-3-642-84010-4\_1, Corpus ID: 118364012.

### References

1. **Valasek J.** Morphing Aerospace Vehicles and Structures. *Morphing Aerospace Vehicles and Structures*, 2012. doi:10.1002/9781119964032
2. **Dantsker O. D., Haviland S. T., Allford R., Daley D., Danowsky B. P., Haplin D., Kendall G., Lisoski D. L., Liu Z. T., Mukherjee J., Peltz A., Price B., Sano G., Warner R. B., and Bershadsky D.** Flight Testing of Tailless Subs-scale HAPS Aircraft. *AIAA Paper 2023-3780*, AIAA Aviation Forum, Virtual Event, Jun. 2023
3. **Zverkov I. D., Kozlov V. V., Kryukov A. V.** Method of control of aerodynamic characteristics of the bearing surface and the bearing surface. Patent No. 2412864C1 (RU) priority RU2009127202/11A from 14.07.2009.
4. **Zverkov I. D., Kryukov A. V. Evtushok G. Yu.** Methods of determining the boundary layer characteristics of the varioform section wing. *AIP Conference Proceedings 2027*, 030097 (2018); doi: 10.1063/1.5065191.
5. **Kryukov A. V., Zverkov I. D., Chubrikov A. E., Kulikov V. V.** Morphine wing as the basis of the aircraft of the future. *AIP Conference Proceedings 2288*, 030059 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0028416>.

6. **Zverkov I. D.; Kozlov V. V.; Kryukov A. V.** Investigation of the boundary layer detachment on the classical and “wavy” wings with the help of a thermal imager (in Rus.). *Vestnik NSU. Ser. Physics*, 2010, vol. 5, no. 3, pp. 20–28.
7. **Zverkov I. D.; Kozlov V. V.; Kryukov A. V.** Influence of a surface waviness on the boundary layer structure and aerodynamic characteristics of a finite-size wing (in Russian). *Vestnik of NSU. NSU. Ser. Physics*, 2011, vol. 6, no. 2, pp. 28–42.
8. **Zverkov I. D.; Kozlov V. V.; Kryukov A. V.** Streamline features of a straight and sliding wing of finite span with a smooth and wavy surface in the region of critical angles of attack (in Rus.). *NSU Vestnik. Ser. Physics*, 2012, vol. 7, no. 4, pp. 57–67.
9. **Zverkov I. D., Kozlov V. V., Kryukov A. V.** Prospects for research in the field of small-sized aircraft. *NSU Bulletin, Series: Physics*, 2014, vol. 9, iss.2, pp. 95–115.
10. **Zverkov I. D., Kryukov A. V.** Impact onto the boundary layer on the airfoil of a small-sized flying vehicle with the use of a wavy surface. Problems and prospects (review). *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2021, vol. 62, no. 3, pp. 180–198.
11. **Drela M.** XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils. *Conference on Low Reynolds Number Aerodynamics*, 1989, pp. 1–12. DOI:10.1007/978-3-642-84010-4\_1, Corpus ID: 118364012

### Сведения об авторах

**Крюков Алексей Владимирович**, кандидат технических наук, научный сотрудник

**Зверков Илья Дмитриевич**, доктор технических наук, старший научный сотрудник

**Чехов Вячеслав Павлович**, младший научный сотрудник

**Матвеев Даниил Александрович**, аспирант

**Мешков Александр Андреевич**, аспирант

### Information about the Authors

**Alexey V. Kryukov**, Candidate of Technical Sciences, Researcher

**Ilya D. Zverkov**, Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher

**Vyacheslav P. Chekhov**, Junior Researcher

**Daniil A. Matveev**, Postgraduate Student

**Alexander A. Meshkov**, Postgraduate Student

*Статья поступила в редакцию 02.12.2024;  
одобрена после рецензирования 11.12.2024; принята к публикации 18.12.2024*

*The article was submitted 02.12.2024;  
approved after reviewing 11.12.2024; accepted for publication 18.12.2024*

Научная статья

УДК 532.526.3:539.217.1

DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-28-36

## Влияние угла ориентации каверн периодической структуры на стабилизацию сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине

Владимир Иванович Лысенко<sup>1</sup>, Борис Владимирович Смородский<sup>2</sup>  
Александр Дмитриевич Косинов<sup>3</sup>, Алексей Анатольевич Яцких<sup>4</sup>

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН  
Новосибирск, Россия

<sup>1</sup>vl@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0209-6299>

<sup>2</sup>smorodsk@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6557-8327>

<sup>3</sup>kosinov@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8626-4669>

<sup>4</sup>yatskikh@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0217-0236>

### Аннотация

Представлены результаты исследования устойчивости сверхзвукового пограничного слоя по отношению к естественным возмущениям первой вихревой моды. Поверхность модели плоской пластины была оборудована кавернами (прямоугольными углублениями, пазами) малой глубины ( $h = 0,18$  мм, число Рейнольдса  $Re_h \approx 1000$ ) с различными углами их ориентации  $0$  и  $60^\circ$ . Эксперименты проводились при числе Маха  $M = 2$ . Обнаружено, что при уменьшении угла ориентации продольных каверн от  $60^\circ$  до  $0$  максимальные инкременты роста возмущений снижаются и при нулевом угле становятся меньше их значений для гладкой пластины. Полученные результаты показывают, что возмущения первой моды в сверхзвуковом пограничном слое можно стабилизировать продольными кавернами периодической структуры малой глубины, однако наличие каверн той же глубины, но ориентированных под углом  $60^\circ$ , приводит к заметной дестабилизации течения.

### Ключевые слова

сжимаемый пограничный слой, гидродинамическая устойчивость, каверны

### Финансирование

Исследование выполнено по теме государственного задания. Эксперименты проведены с использованием оборудования ЦКП «Механика» (ИТПМ СО РАН).

### Благодарности

Авторы благодарят В. С. Шикалова за помощь в подготовке эксперимента.

### Для цитирования

Лысенко В. И., Смородский Б. В., Косинов А. Д., Яцких А. А. Влияние угла ориентации каверн периодической структуры на стабилизацию сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине // Сибирский физический журнал. 2025. Т. 20, № 1. С. 28–36. DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-28-36

© Лысенко В. И., Смородский Б. В., Косинов А. Д., Яцких А. А., 2025

ISSN 2541-9447

Сибирский физический журнал. 2025. Том 20, № 1

Siberian Journal of Physics, 2025, vol. 20, no. 1

# Effect of Periodic-Structure Grooves Orientation Angle on Supersonic Flat-Plate Boundary Layer Stabilization

Vladimir I. Lysenko<sup>1</sup>, Boris V. Smorodsky<sup>2</sup>  
Alexander D. Kosinov<sup>3</sup>, Alexey A. Yatskikh<sup>4</sup>

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of SB RAS  
Novosibirsk, Russian Federation

<sup>1</sup>vl@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0209-6299>

<sup>2</sup>smorodsk@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6557-8327>

<sup>3</sup>kosinov@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8626-4669>

<sup>4</sup>yatskikh@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0217-0236>

## Abstract

The paper presents results of experimental investigation on the stability of the supersonic boundary layer in relation to natural disturbances of the first vorticity mode. The surface of the flat plate model was equipped with grooves (slots, rectangular elongated cavities) of small depth and various angles of their orientation 0 and 60°. Wind tunnel experiments have been performed at Mach number 2. It was found that with decrease of orientation angle from 60° to 0 the maximum spatial amplification rate of disturbances is also decreased. For zero angle this growth rate becomes smaller in comparison with a smooth plate. The obtained results show that the first mode disturbances in supersonic boundary layer can be stabilized by streamwise grooves of a small depth. However, presence of surface grooves of the same depth with orientation angle 60° leads to noticeable flow destabilization.

## Keywords

compressible boundary layer, hydrodynamic stability, slots

## Funding

The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. The study was conducted at the Equipment Sharing Center “Mechanics” of ITAM SB RAS.

## Acknowledgements

Authors express their gratitude to V. S. Shikalov for his assistance in experiment preparation.

## For citation

Lysenko V. I., Smorodsky B. V., Kosinov A. D., Yatskikh A. A. Effect of periodic-structure grooves orientation angle on supersonic flat-plate boundary layer stabilization. *Siberian Journal of Physics*, 2025, vol. 20, no. 1, p. 28–36. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-28-36

## Введение

Работа направлена на решение одной из фундаментальных проблем механики жидкости и газа, связанной с возникновением турбулентности в сверхзвуковых пограничных слоях – исследование нового (ранее не применявшегося при сверхзвуковых скоростях обтекания) способа стабилизации сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине с помощью продольных каверн периодической структуры.

Еще в 90-е гг. XX в. было опубликовано много работ (например, [1]) по влиянию риблет (рёбер) и каверн на дозвуковой пограничный слой на плоской пластине с целью уменьшения вязкого сопротивления, турбулентного трения, управления продольными структурами, исследования процесса развития уединенного волнового пакета и вихрей в пограничном слое и т. д.

Также активно исследовалось влияние риблет и каверн (в основном, риблет) на развитие в дозвуковом пограничном слое возмущений Толлмина – Шлихтинга и на ламинарно-турбулентный переход. Результаты были противоречивы – были получены как задержка [2], так и ускорение [3] перехода.

В первом-втором десятилетии XXI в. было выполнено много работ (более 50, например, [4–6]) на двумерных телах (пластинах, конусах) по стабилизации второй (акустической) моды пористым покрытием, микрополостями, прямоугольными щелями, волнистой поверхностью, шероховатостью, выступами и т. д. И до 2021 г. превалировала точка зрения о том, что сверхзвуковой пограничный слой стабилизировать с помощью каверн нельзя.

Целью работы [7], вышедшей в 2021 г., было изучение того, применима ли концепция акустического метаматериала для подавления возмущений первой моды в сверхзвуковом пограничном слое. И однозначного ответа на поставленный вопрос в этой работе получено не было. Поэтому нами и было принято решение провести исследования по стабилизации сверхзвукового пограничного слоя с помощью каверн периодической структуры.

Одновременно с нашей подготовкой к проведению таких исследований в 2022 г. была опубликована статья [8] группы из Китая, в которой приведены результаты попытки расчетным путем с помощью каверн (слотов, акустической метаповерхности) стабилизировать первую моду при  $M = 4$ . И в расчетах по линейной теории устойчивости (ЛТУ, LST), и при прямом численном моделировании (DNS) использовались только двумерные уравнения. Полученные в работе данные оказались противоречивыми. Если с помощью линейной теории устойчивости удалось (правда, крайне незначительно) стабилизировать возмущения первой моды, то при более точных расчетах с помощью уравнений Навье – Стокса (DNS) (когда учитывались рециркуляционные потоки внутри щелей и чередующиеся волны расширения и сжатия, индуцированные на краях щелей, что игнорировалось в расчетах по ЛТУ) добиться стабилизации первой моды не удавалось. Используемая авторами широкополосная акустическая метаповерхность дестабилизировала первую моду по сравнению с гладкой стенкой и привела к большим амплитудам флуктуаций давления на поверхности. Лишь на нагретой стенке и на укороченном участке акустической метаповерхности (несмотря на то, что амплитуды возмущений давления стенки в области метаповерхности были больше, чем соответствующие амплитуды на гладкой стенке) эти амплитуды ниже по потоку от метаповерхности постепенно уменьшались, что показывает возможность стабилизации процесса усиления первой моды с помощью акустической метаповерхности. Правда, в этой работе было существенное ограничение – использовались только поперечные каверны с углом их ориентации по отношению к набегающему потоку  $\varphi = 90^\circ$ . В настоящей работе рассмотрены каверны с углами ориентации  $\varphi = 0$  и  $60^\circ$ , поскольку именно при уменьшении угла от  $\varphi = 90^\circ$  до  $0$  ожидается уменьшение «шероховатости», вызванной рециркуляционными потоками внутри щелей и чередующимися волнами расширения и сжатия, индуцированными на краях щелей. В результате возмущения первой моды, вызванные этой «шероховатостью», должны уменьшаться. Опубликование статьи [8] говорит о том, что тема нашей работы является актуальной.

До 2021 г. существовала точка зрения, что сверхзвуковой пограничный слой, в котором ламинарно-турбулентный переход (ЛТП) определяется первой модой возмущений (волнами Толлмина – Шлихтинга), стабилизировать с помощью продольных каверн периодической структуры нельзя. Однако результаты ряда исследований привели авторов настоящей работы к уверенности в том, что стабилизировать сверхзвуковой пограничный слой с помощью каверн очень малой глубины можно. В статье [9] авторов данной работы по влиянию глубины пор (некоторого аналога каверн) на устойчивость сверхзвукового пограничного слоя было показано, что уменьшение толщины проницаемого (пористого) покрытия ведет к благоприятному в отношении стабилизации изменению нестационарного течения газа внутри пористого покрытия.

Целью данной работы является выяснение возможности получения стабилизация естественных возмущений сверхзвукового пограничного слоя с помощью каверн периодической структуры и, в частности, выявление влияния угла ориентации каверн на развитие возмущений.

## Методика эксперимента

Конкретная задача в планируемых исследованиях была подобрать такие параметры каверн (канавок, бороздок, слотов), при которых сверхзвуковой пограничный слой на плоской пластине можно сделать более устойчивым.

Эксперименты были проведены в аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН [10] при числе Маха набегающего потока  $M_\infty = 2$ , температуре торможения потока  $T_0 = 290$  К и значении единичного числа Рейнольдса  $Re_{1\infty} = 6 \cdot 10^6$  м<sup>-1</sup>.

В качестве модели была использована теплоизолированная плоская пластина, изготовленная из нержавеющей стали, длиной 440 мм, толщиной 10 мм и шириной 200 мм; с носиком, скошенным под углом  $14^\circ$ , и радиусом притупления передней кромки менее 0,05 мм. На участке  $53 \leq x \leq 165$  мм рабочей поверхности на всю ширину пластины в модели был сделан паз глубиной 4,3 мм, куда поочередно вставлялись вставки-пластинки с кавернами периодической структуры. Пластина жестко крепилась к боковым стенкам рабочей части трубы и устанавливалась под нулевым углом атаки.

Авторами настоящей работы ранее было установлено, что использование прямоугольных продольных каверн глубиной  $h = 0,18$  мм (число Рейнольдса  $Re_h \approx 1000$ ) приводит к тому, что возмущения пограничного слоя нарастают медленнее, чем на гладкой пластине. Поэтому были изготовлены две пластинки-вставки с прямоугольными кавернами глубиной  $h = 0,18$  мм и углами ориентации каверн  $\varphi = 0$  и  $60^\circ$ . Ширина каждой каверны по нормали составила 0,6 мм, ширина ребра между кавернами также 0,6 мм. Таким образом, шаг каверн был 1,2 мм.

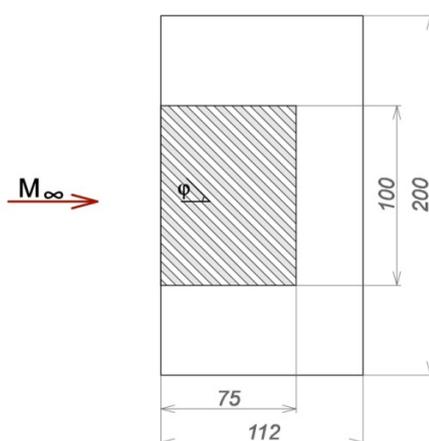


Рис. 1. Пластика-вставка с наклонными к набегающему потоку под углом  $\varphi$  кавернами

Fig. 1. Insert with the slots oblique under the angle  $\varphi$  in relation to the free-flow slots

На рис. 1 приведен упрощенный чертеж пластинки-вставки с наклонными по отношению к набегающему потоку под углом  $\varphi$  кавернами.

Измерения устойчивости пограничного слоя к естественным возмущениям были выполнены с помощью термоанемометра постоянного сопротивления с одноточечным датчиком из вольфрамовой нити диаметром 10 мкм и длиной 1,5 мм.

Исследования возмущений в пограничном слое модели были проведены в слое, близком к слою с максимальными пульсациями, при  $E = \text{const}$  ( $E$  – среднее напряжение в диагонали моста термоанемометра), что соответствовало линии равного массового расхода.

Средние и пульсационные характеристики потока измерялись с помощью автоматизированной системы сбора данных, которой оборудована аэродинамическая труба Т-325. Пульсационное напряжение с термоанемометра записывалось в персональный компьютер (ПК) с помощью двенадцатиразрядного амплитудно-цифрового преобразователя с частотой отсчетов 750 кГц. Среднее напряжение термоанемометра фиксировалось вольтметром и записывалось в персональный компьютер через последовательный порт. Амплитудно-частотный спектр  $A(f, x)$  рассчитывался как результат осреднения спектров мощности.

## Результаты и их анализ

На рис. 2 показаны полученные в эксперименте кривые нарастания амплитуд возмущений по продольной координате  $A = A(x)$  на частотах  $f = 10, 15$  и  $20$  кГц ( $a, б, в$  соответственно) для углов ориентации каверн  $\varphi = 0$  и  $60^\circ$  (кривые 1, 2) и гладкой вставки (кривая 0). Видно, что если для  $f = 10$  кГц и  $\varphi = 0$  имеет место стабилизация возмущений вдоль потока, то при  $\varphi = 60^\circ$  имеет место сильная дестабилизация.

Также на рис. 2 видно, что для всех трех  $f = 10, 15$  и  $20$  кГц возмущения при  $\varphi = 0$  растут медленнее, чем на гладкой плоской пластине, а при  $\varphi = 60^\circ$  – значительно быстрее. При этом нужно подчеркнуть, что в сверхзвуковом пограничном слое при  $M = 2$  наиболее быстрорастущими являются трехмерные волновые возмущения с углом ориентации волнового частот вектора  $\chi \approx 60^\circ$ .

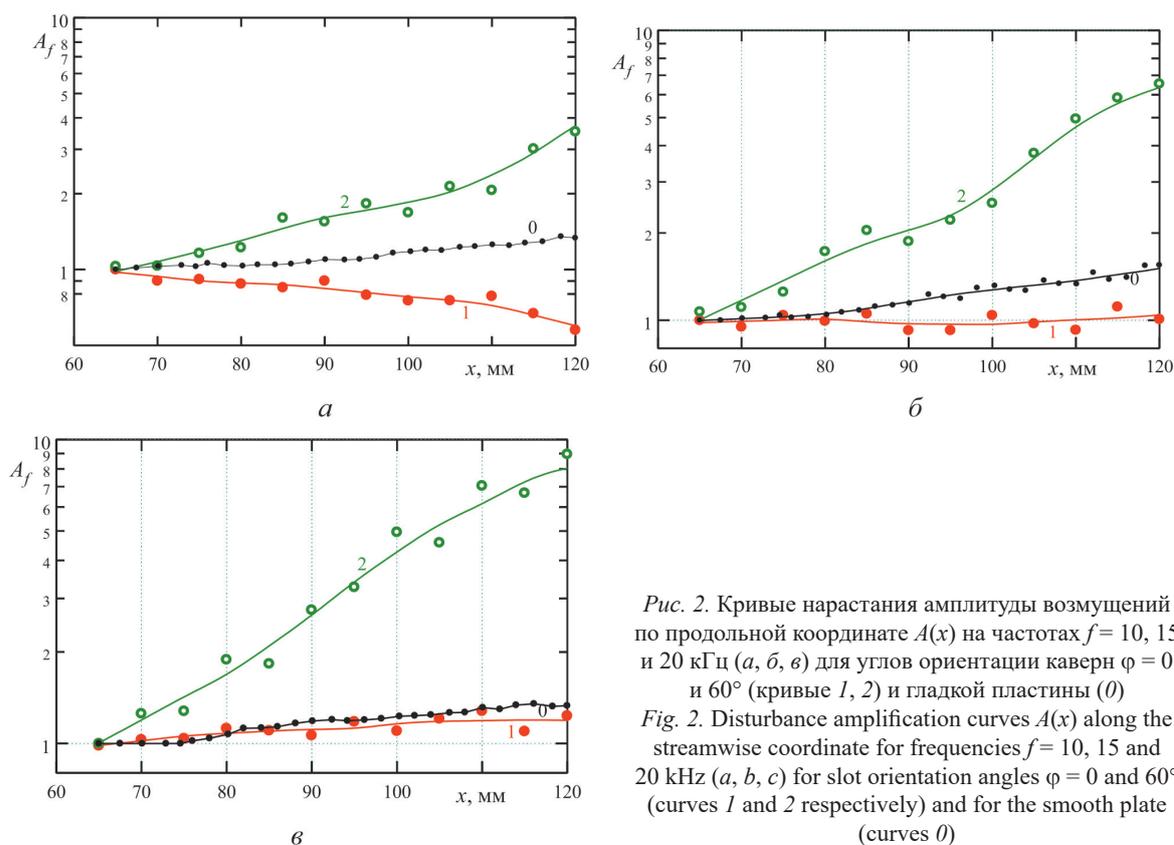


Рис. 2. Кривые нарастания амплитуды возмущений по продольной координате  $A(x)$  на частотах  $f = 10, 15$  и  $20$  кГц ( $a, б, в$ ) для углов ориентации каверн  $\varphi = 0$  и  $60^\circ$  (кривые 1, 2) и гладкой пластины (0)  
 Fig. 2. Disturbance amplification curves  $A(x)$  along the streamwise coordinate for frequencies  $f = 10, 15$  and  $20$  kHz ( $a, б, в$ ) for slot orientation angles  $\varphi = 0$  and  $60^\circ$  (curves 1 and 2 respectively) and for the smooth plate (curves 0)

На рис. 3 приведены скорости пространственного роста возмущений  $-\alpha_i$  в зависимости от частоты  $f$  при  $x = 95$  мм и углах ориентации каверн  $\varphi = 0$  и  $60^\circ$  (кривые 1, 2). Проводится сравнение с экспериментальными данными (кривая 0) для гладкой вставки. Видно, что по мере уменьшения угла ориентации каверн от  $60^\circ$  до  $0$  максимальные скорости пространственного роста возмущений снижаются. И при  $\varphi = 0$  они становятся меньше соответствующего значения для гладкой пластины.

На рис. 4 представлены максимальные скорости пространственного роста возмущений  $-\alpha_{i,\max} = \max_f(-\alpha_i)$  в зависимости от углов ориентации каверн ( $\varphi = 0$  и  $60^\circ$ ) при  $x = 95$  мм.

Пунктирной линией показано значение для гладкой вставки. Видно, что по мере уменьшения угла ориентации каверн максимальные скорости пространственного роста возмущений уменьшаются. При этом максимальные инкременты роста возмущений при  $\varphi = 0$  меньше, чем на гладкой пластине.

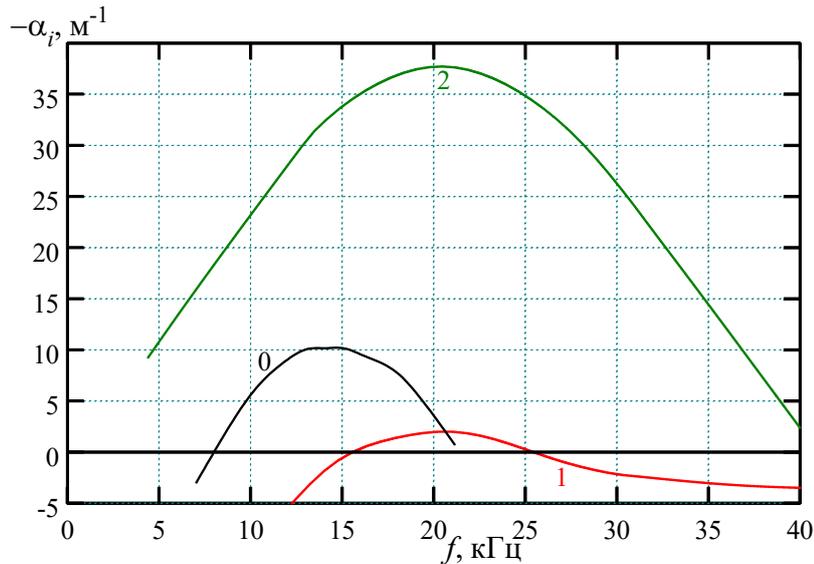


Рис. 3. Скорости пространственного роста возмущений  $-\alpha_i$  в зависимости от частоты  $f$  для углов ориентации каверн  $\varphi = 0$  и  $60^\circ$  (кривые 1, 2),  $x = 95$  мм. Сравнение с экспериментальными данными для гладкой пластины (кривая 0)

Fig. 3. Disturbance spatial amplification rates  $-\alpha_i$  versus frequency  $f$  for slot orientation angles  $\varphi = 0$  and  $60^\circ$  (curves 1 and 2 respectively),  $x = 95$  mm. Comparison with experimental data for the smooth plate (curve 0)

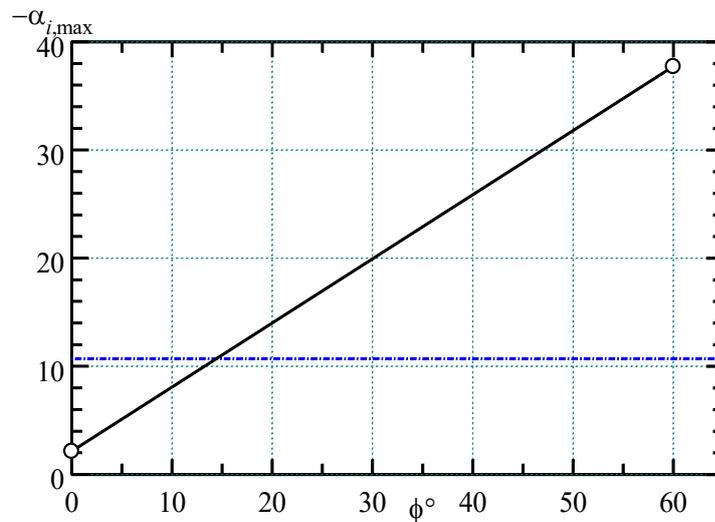


Рис. 4. Максимальные скорости пространственного роста возмущений  $-\alpha_{i, \max}$  в зависимости от угла ориентации каверн  $\varphi$  при  $x = 95$  мм. Пунктирная линия – значение для гладкой вставки

Fig. 4. Maximal disturbance spatial amplification rates  $-\alpha_{i, \max}$  versus slot orientation angle  $\varphi$  at  $x = 95$  mm. Dashed line shows the value for the smooth plate

Уменьшение максимальных скоростей пространственного роста возмущений (подавление возмущений) первой моды на вставках с продольными кавернами глубиной 0,18 мм (число Рейнольдса по глубине  $Re_h \approx 1000$  объясняется благоприятным (в отношении стабилизации) изменением течения газа в пограничном слое, связанном с расширением течения при его вхождении в каверны.

При этом уменьшение максимальных скоростей пространственного роста возмущений по мере уменьшения угла ориентации каверн (от  $\varphi = 60^\circ$  до  $0$ ) объясняется уменьшением «шероховатости», вызванной рециркуляционными потоками внутри каверн и чередующимися волнами расширения и сжатия, индуцированными на краях каверн в соответствии с результатами работы [8]. При  $\varphi = 0$  такая «шероховатость» минимальна.

Таким образом, полученные результаты наглядно показывают, что возмущения первой моды в сверхзвуковом пограничном слое с числом Маха  $M = 2$  можно стабилизировать продольными кавернами малой глубины (конкретно, с числом Рейнольдса по глубине каверн  $Re_h \approx 1000$ ). Однако при этом пограничный слой заметно дестабилизируется кавернами такой же глубины, ориентированными под углом  $\varphi = 60^\circ$ .

### Заключение

Проведено исследование влияния поверхностных каверн глубиной  $h = 0,18$  мм (число Рейнольдса  $Re_h \approx 1000$ ) с двумя углами их ориентации  $\varphi = 0$  и  $60^\circ$  на устойчивость сверхзвукового пограничного слоя при числе Маха  $M = 2$  на плоской пластине к естественным возмущениям первой моды неустойчивости.

Найдено, что при уменьшении угла ориентации каверн от  $\varphi = 60^\circ$  до  $0$  максимальные скорости пространственного роста возмущений уменьшаются и при  $\varphi = 0$  они становятся меньше соответствующего значения для гладкой пластины.

Такое уменьшение максимальных скоростей пространственного роста возмущений по мере уменьшения угла ориентации каверн объясняется уменьшением «шероховатости», вызванной рециркуляционными потоками внутри каверн и чередующимися волнами расширения и сжатия, индуцированными на краях каверн. При  $\varphi = 0$  такая «шероховатость» минимальна.

Таким образом, полученные результаты наглядно и однозначно демонстрируют, что возмущения первой моды в сверхзвуковом пограничном слое можно стабилизировать продольными кавернами малой глубины (с числом Рейнольдса по глубине каверн  $Re_h \approx 1000$ ) или заметно дестабилизировать кавернами той же глубины, но ориентированных под углом  $\varphi = 60^\circ$ .

### Список литературы

1. **Бойко А. В., Козлов В. В., Сызранцев В. В., Щербаков В. А.** Управление при помощи риблет ламинарно-турбулентным переходом в стационарном вихре на скользящем крыле // ПМТФ. 1996. № 1. С. 82–94.
2. **Schneider M., Dinkelacker A.** Drag reduction by means of surface riblets on an inclined body of revolution // 7th Eur. Drag Reduction Working Meeting, Sept. 24–25, 1992. Berlin, Germany: Submitted Abstrs.
3. **Белов И. А., Енютин Г. В., Литвинов В. М.** Влияние продольного и поперечного оребрения плоской пластины на ламинарно-турбулентный переход // Учен. зап. ЦАГИ. 1990. Т. 21. № 6. С. 107–111.
4. **Sandham N. D., Lüdeke H.** Numerical study of Mach 6 boundary-layer stabilization by means of a porous surface // AIAA J. 2009. V.47(9). P.2243–2252.
5. **Fong K.D., Zhong X.** DNS and PSE study on the stabilization effect of hypersonic boundary layer waves using 2-D surface roughness // AIAA Paper. 2016. No. 2016–3347. 21 p.
6. **Hao J., Wen C. Y.** Stabilization of a Mach 6 boundary layer using a two-dimensional cavity // AIAA Paper. 2019. No. 2019–1131.
7. **De Koning C.** Application of acoustic metamaterials in boundary layer instability control. Master thesis, Delft University of Technology. Delft., 2021. 92 p.
8. **Zhao R., Liu X., Wen C., Wang X.** Broadband design of acoustic metasurfaces for the stabilization of a Mach 4 boundary layer flow // Adv. Aerodyn. 2022. Vol. 4. Art. 15. 18 p.

9. **Lysenko V. I., Gaponov S. A., Smorodsky B. V., Yermolaev Yu. G., Kosinov A. D., Semionov N. V.** Combined influence of coating permeability and roughness on supersonic boundary layer stability and transition // *J. Fluid Mech.* 2016. Vol. 798. P. 751–773.
10. **Багаев Г. И., Лебига В. А., Приданов В. Г., Черных В. В.** Сверхзвуковая аэродинамическая труба Т-325 с пониженной степенью турбулентности // *Аэрофизические исследования*. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1972. С. 11–13.

### References

1. **Boiko A. V., Kozlov V. V., Syzrantsev V. V., Shcherbakov V. A.** Riblet control of the laminar-turbulent transition in a stationary vortex on an oblique airfoil. *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, 1996, vol. 37, no. 1, pp. 69–79. (in Russ.)
2. **Schneider M., Dinkelacker A.** Drag reduction by means of surface riblets on an inclined body of revolution. In: 7th Eur. Drag Reduction Working Meeting, Sept. 24–25, 1992. Berlin, Germany: Submitted Abstrs.
3. **Belov I. A., Enyutin G. V., Litvinov V. M.** Influence of streamwise and spanwise fins on a flat plate on laminar-turbulent transition. *Uch. Zap. TsAGI*, 1990, vol. 21, no. 6, pp. 107–111.
4. **Sandham N. D., Lüdeke H.** Numerical study of Mach 6 boundary-layer stabilization by means of a porous surface. *AIAA J.*, 2009, vol. 47 (9), pp. 2243–2252. (in Russ.)
5. **Fong K.D., Zhong X.** DNS and PSE study on the stabilization effect of hypersonic boundary layer waves using 2-D surface roughness. *AIAA Paper*, 2016, no. 2016–3347, 21 p.
6. **Hao J., Wen C. Y.** Stabilization of a Mach 6 boundary layer using a two-dimensional cavity. *AIAA Paper*, 2019, no. 2019–1131.
7. **De Koning C.** Application of acoustic metamaterials in boundary layer instability control. Master thesis, Delft University of Technology. Delft., 2021. 92 p.
8. **Zhao R., Liu X., Wen C., Wang X.** Broadband design of acoustic metasurfaces for the stabilization of a Mach 4 boundary layer flow. *Adv. Aerodyn.*, 2022, vol. 4, art. 15, 18 p.
9. **Lysenko V. I., Gaponov S. A., Smorodsky B. V., Yermolaev Yu. G., Kosinov A. D., Semionov N. V.** Combined influence of coating permeability and roughness on supersonic boundary layer stability and transition. *J. Fluid Mech.*, 2016, vol. 798, pp. 751–773.
10. **Bagaev G. I., Lebiga V. A., Pridanov V. G., Turchinov V. G., Chernykh V. V.** Supersonic wind tunnel T-325 with low level of turbulence. In: *Aerophysical Studies*, Novosibirsk, ITAM SB USSR publ., 1972, pp. 11–13.

### Сведения об авторах

**Лысенко Владимир Иванович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник

**Смородский Борис Владимирович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

**Косинов Александр Дмитриевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник

**Яцких Алексей Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

### Information about the Authors

**Vladimir I. Lysenko**, Doctor of Science in Physics and Mathematics

**Boris V. Smorodsky**, Candidate of Science in Physics and Mathematics

**Alexander D. Kosinov**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Head of Laboratory  
**Alexey A. Yatskih**, Candidate of Science in Physics and Mathematics

*Статья поступила в редакцию 09.01.2025;  
одобрена после рецензирования 20.01.2025; принята к публикации 27.01.2025*

*The article was submitted 09.01.2025;  
approved after reviewing 20.01.2025; accepted for publication 27.01.2025*

Научная статья

УДК 66.071.6.081.6

DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-37-46

## **О реализации динамического режима сорбции на селективно проницаемых микросферах для выделения гелия**

**Иван Викторович Казанин, Елизавета Павловна Щиглова  
Даниэла Владимировна Журавлева**

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН  
Новосибирск, Россия  
kazanin@itam.nsc.ru

### *Аннотация*

Работа посвящена предварительным исследованиям мембранно-сорбционного метода разделения газов в динамическом режиме. Для исследования и анализа данного режима газоразделения необходимо создание специального экспериментального стенда и измерительного оборудования, позволяющего непосредственно в темпе эксперимента получать информацию об изменении концентрации компонент в газовой смеси. Для измерения концентрации в ходе эксперимента был использован разработанный в ИТПМ СО РАН датчик концентрации для бинарных смесей газов на основе термоанемометрического метода. Проведено тестирования датчика концентрации, получены тарировочные зависимости для воздушно-гелиевой смеси, отработана методика по измерению концентрации компонент в газовой смеси непосредственно в темпе проведения эксперимента. Определены параметры отклика датчика на ступенчатое изменение концентрации гелия в смеси, время реакции составило менее 0,4 секунды. Проведены эксперименты по моделированию динамического режима сорбции при течении гелийсодержащей смеси по селективно проницаемому слою из кремнеземных микросфер. По результатам экспериментов даны рекомендации по подготовке стенда для динамического разделения газов на основе мембранно-сорбционного метода.

### *Ключевые слова*

гелий, микросферы, селективность, динамический режим сорбции, газоразделение

### *Финансирование*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Правительства Новосибирской области (код проекта 23-29-10068).

### *Для цитирования*

Казанин И. В., Щиглова Е. П., Журавлева Д. В. О реализации динамического режима сорбции на селективно проницаемых микросферах для выделения гелия // Сибирский физический журнал. 2025. Т. 20, № 1. С. 37–46. DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-37-46

# On the Implementation of a Dynamic Sorption Mode on Selectively Permeable Microspheres for Helium Recovery

Ivan V. Kazanin<sup>1</sup>, Elizaveta P. Shchiglova,  
Daniela V. Zhuravleva

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS  
Novosibirsk, Russian Federation

kazanin@itam.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6865-3142>

## Abstract

The work is devoted to preliminary studies of the membrane-sorption method of gas separation in the dynamic mode. To study and analyze this gas separation mode, it is necessary to create a special experimental stand and measuring equipment that allows obtaining information on changes in the concentration of components in the gas mixture directly during the experiment. To measure the concentration during the experiment, a concentration sensor for binary gas mixtures developed at ITAM SB RAS based on the hot-wire anemometric method was used. The concentration sensor was tested and calibration dependencies for the air-helium mixture were obtained, a technique for measuring the concentration of components in the gas mixture directly during the experiment was developed. The response time of the sensor to a step change in the helium concentration in the mixture was less than 0.4 seconds. Experiments were conducted to model the dynamic sorption mode during the flow of a helium-containing mixture through a selectively permeable layer of silica microspheres. Based on the experiment results, recommendations were given for preparing a stand for dynamic gas separation based on the membrane-sorption method.

## Keywords

helium, microspheres, selectivity, dynamic sorption mode, gas separation

## Acknowledgements

The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation and the Government of the Novosibirsk Region (№ 23-29-10068).

## For citation

Kazanin I. V., Shchiglova E. P., Zhuravleva D. V. On the Implementation of a Dynamic Sorption Mode on Selectively Permeable Microspheres for Helium Recovery. *Siberian Journal of Physics*, 2025, vol. 20, no. 1, p. 37–46. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-37-46

## Введение

В Институте теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН ведутся работы по мембранно-сорбционному методу для разделения гелийсодержащих газовых смесей. Отличительной особенностью метода является использование в качестве мембранных элементов полых сферических микрочастиц из силикатных материалов, стенка которых обладает селективной проницаемостью по отношению к гелию [1]. Применение полых сферических частиц в качестве мембранных элементов позволяет решить часть особенностей, связанных с силикатными материалами и мембранами на их основе, которым присущи низкие параметры проницаемости и высокие коэффициенты селективности, а именно: значительно увеличить суммарную площадь газообмена, при этом сферическая форма и малые размеры обеспечивают высокую гидростатическую прочность, что напрямую связано с параметрами производительности разделительных установок. Вследствие этого такие частицы могут использоваться как микробаллоны, во внутренний объем которых проникает гелий из смеси и удерживается в нем. Микросферы ведут себя как сорбенты для гелия, а разделение смеси основано на селективности их оболочки. Для разделения газовой смеси используется короткоцикловый режим работы установки. На первом этапе цикла гелийсодержащая смесь напускается в адсорбер и начинается процесс сорбции, гелий проникает во внутренний объем микросфер, этот процесс продолжается до выравнивания парциальных давлений вне и внутри микросфер. Далее обедненная смесь удаляется из адсорбера и, за счет создания обратного перепада давления гелия вне и внутри микросфер, начинается процесс десорбции – гелий из внутреннего объема микросфер

попадает в свободный объем адсорбера и перекачивается при помощи насосов компрессоров в специальную емкость. Обедненная же смесь направляется в следующий адсорбер, где проходят описанные выше этапы разделения – сорбция и последующая десорбция, циклы продолжают до тех пор, пока не будет достигнута нужная степень извлечения гелия из смеси.

По мере исследования различных типов микросфер и гранулированных сорбентов на их основе были выявлены образцы, обладающие высокими коэффициентами проницаемости для гелия [2]. Характерные времена сорбционных процессов составляют от 5–6 минут при температуре  $\sim 20^\circ\text{C}$  до 60 секунд при температуре  $110^\circ\text{C}$ . При таких высоких темпах процессов поглощения становится возможной реализация динамического режима разделения гелийсодержащих смесей газов, аналогичного методу короткоциклового адсорбции. В данном случае гелийсодержащая смесь пропускается через сорбент, находящийся в протяженном адсорбере, таком, чтобы времена протекания газа превышали характерные времена сорбционных процессов при этом происходит процесс сорбции, и концентрация гелия в смеси понижается. По мере насыщения сорбента подача смеси переключается на следующий адсорбер, при этом исходный адсорбер ставится на регенерацию – происходит откачка и перекачка поглощенного гелия в специальную емкость. В работе [3] проведено численное моделирование фазы обогащения в режиме короткоциклового адсорбции с использованием бифункционального сорбента на основе микросфер, которое показало возможность увеличения концентрации гелия в воздушно-гелиевой смеси практически в два раза (с 0,7 до 1,3 % по массе) при степени извлечения гелия 90,4 %.

Данная работа посвящена предварительным исследованиям мембранно-сорбционного метода разделения газов в динамическом режиме, отработке основных элементов для реализации динамического режима сорбции, включая систему измерения концентрации смеси непосредственно в темпе эксперимента.

### Сорбционный материал

В качестве селективно проницаемых частиц в работе использовались кремнеземные микросферы. Как показали ранее проводимые экспериментальные исследования гелиевой проницаемости, данные микросферы обладают высокими коэффициентами проницаемости для гелия [4] и могут быть применены в качестве сорбента для динамического режима газоразделения. Микросферы представляют собой отдельные полые частицы сферической формы, изготовленные из силикатных материалов. Для используемых в работе кремнеземных микросфер, произведенных в ОАО «НПО Стеклопластик», средний размер частиц составляет 52 мкм, толщина стенки  $\sim 1$  мкм, насыпная плотность  $\sim 0,2$  г/см<sup>3</sup>. На рис. 1 представлено изображение кремнеземных микросфер, полученное с помощью оптического микроскопа и гистограмма гранулометрического распределения частиц по размеру.

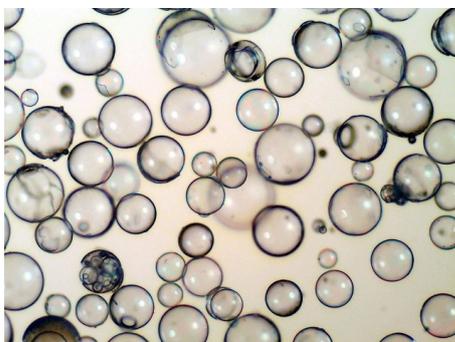
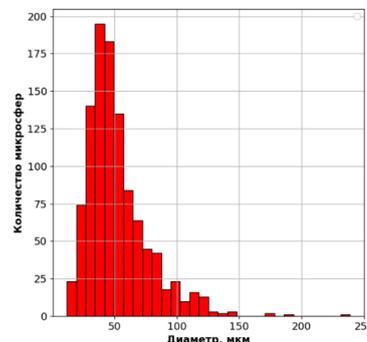
*a**б*

Рис. 1. Фотография кремнеземных микросфер (*a*) и гистограмма гранулометрического распределения частиц по размеру (*б*)

Fig. 1. Photograph of silica microspheres (*a*) and histogram of particle size distribution (*b*)

Как видно по фотографии, микросферы обладают практически идеальной сферической формой с гладкой поверхностью. На отдельных изображениях присутствуют частицы с поврежденной оболочкой, что дает возможность видеть скол стенок микросфер, проведенные измерения толщины стенки которых составляют  $\sim 1$  мкм, что соответствует величине, заявленной производителем.

### Экспериментальный стенд

Для отработки экспериментальной части по динамическому режиму сорбции на первом этапе работ использовался экспериментальный стенд, предназначенный для проведения экспериментов по измерению динамики процессов сорбции и десорбции целевого газа полыми микросферическими частицами и сорбентами на их основе. Принципиальная схема стенда представлена на рис. 2, адсорбер выполнен на основе нержавеющей трубы, с внутренним диаметром 25 мм и длиной 1120 мм, объем адсорбера  $\sim 0,54$  л, рабочее давление до 1 МПа и температурный диапазон до 120 °С.

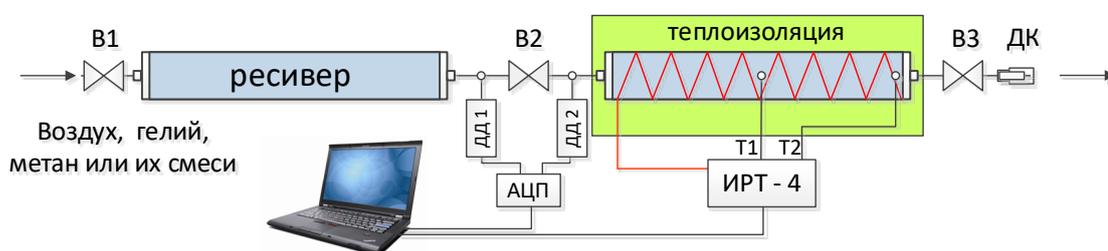


Рис. 2. Общая схема экспериментального стенда: V1, V2, V3 – вентили, ДД1, ДД2 – датчики давления, ИРТ-4 – терморегулятор, ДК – датчик концентрации  
 Fig. 2. General diagram of the experimental setup: V1, V2, V3 – valves, PS1, PS2 – pressure sensors, IRT-4 – thermostat, DK – concentration sensor

Ресивер, входящий в состав стенда, имеет объем 10 л, наличие ресивера позволяет существенно оптимизировать процедуру подготовки рабочего газа (смеси) перед пропуском ее через адсорбер с сорбентом. Стенд снабжен системой нагрева и поддержания заданной температуры адсорбера с помощью измерителя-регулятора температуры ИРТ-4. Измерение давления в ресивере и адсорбере осуществляется с помощью датчиков давления ДД1, ДД2 – BD Sensor DMP 331i (датчик абсолютного давления) с рабочим диапазоном давлений от 0 до 2,0 МПа и точностью измерений  $\pm 0,1$  %. Датчик концентрации подсоединялся к выходу адсорбера после вентиля V3 таким образом, чтобы пропускаемая в ходе эксперимента через адсорбер газовая смесь проходила через датчик. Слой кремнеземных микросфер внутри адсорбера составлял  $\sim 90$  см. После засыпки в адсорбер микросферы поджимались внутри специальным пружинным демпфером, что исключало их перемещение внутри адсорбера при напуске/сбросе газа, а также не меняло параметры засыпки при горизонтальном или вертикально расположении адсорбера.

### Датчик концентрации на основе термоанемометрического метода

Для возможности непосредственно в темпе эксперимента получать информацию об изменении концентрации компонент в газовой смеси был использован разработанный в ИТПМ СО РАН датчик концентрации для бинарных смесей газов на основе термоанемометрического метода [5]. Принцип работы данного датчика основан на определении теплопотерь на чувствительном элементе, которые пропорциональны изменению теплопроводности газовой смеси, в зависимости от концентрации составляющих ее компонент и параметров потока газа. Общая

схема и фотография датчика представлена на рис. 3. Датчик концентрации представляет собой устройство, состоящее из цилиндрического корпуса (1). Внутри корпуса находится канал (2), который начинается с диаметром 2 мм и расширяется до 6 мм, где установлена дроссельная шайба (3) с отверстием диаметром 0,5 мм. При определенном перепаде давления в канале обеспечивается течение с постоянным числом Маха  $M = 0,036$ . В корпусе (4) имеются отверстия для проводников (5) диаметром 0,5 мм, которые проходят через детали (4), (6) из диэлектрического материала. Чувствительные элементы, состоящие из позолоченных вольфрамовых нитей (7) диаметром 6 мкм и длиной 1,4 мм, приварены к этим проводам. Статическое давление в канале контролируется через дренажное отверстие (8) диаметром 0,5 мм. Для обеспечения перепада давления, необходимого для реализации звукового течения в канале, датчик подсоединяли к вакуумному насосу. В работе использовался термоанемометр постоянного сопротивления ТПС-6, разработанный в ИТПМ СО РАН, к которому подключался чувствительный элемент датчика концентрации.

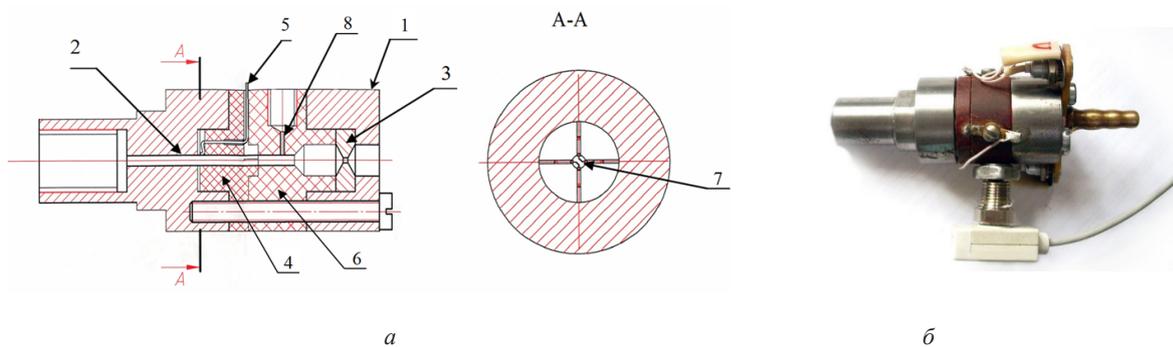


Рис. 3. Схема (а) и фотография (б) датчика концентрации  
 Fig. 3. Scheme (a) and photograph (b) of the concentration sensor

Таким образом, при протекании смеси через датчик концентрации часть параметров потока поддерживается неизменной за счет конструкции датчика (число Маха в канале), а другая непосредственно измеряется – температура, параметры теплообмена, давление, что и позволяет выделить влияние концентрации компонент газовой смеси на теплообмен.

### Экспериментальная часть

Для корректного определения концентрации в смеси предварительно необходимо провести тарировку датчика концентрации, установив связь между измеряемыми величинами и концентрацией. На данном этапе работ по отработке элементов для реализации динамического режима сорбции в качестве рабочей газовой смеси использовалась воздушно-гелиевая смесь. Концентрация гелия в смеси варьировалась от 0 до 100 % об. Приготовление смеси происходило в ресивере по парциальным давлениям компонент. Параметр перегрева на чувствительном элементе датчика концентрации в ходе тарировок и дальнейших экспериментов задавался равным  $a_w = (R_w - R_e)/R_e = 0,4$ , где  $R_w$  и  $R_e$  – сопротивление нагретой и холодной нити соответственно. В ходе тарировочных экспериментов воздушно-гелиевая смесь с известной концентрацией подавалась непосредственно из ресивера на датчик концентрации. Полученные данные для тарировок могут быть представлены в виде классической зависимости в размерной форме  $e^2 = f(\sqrt{P})$  и, как видно на рис. 4, имеют линейную зависимость. Следует отметить, что данные для различных концентраций воздушно-гелиевой смеси хорошо различимы между собой. Также тарировочные данные могут быть представлены в критериальной форме зависимости числа Нуссельта от корня из числа Рейнольдса.

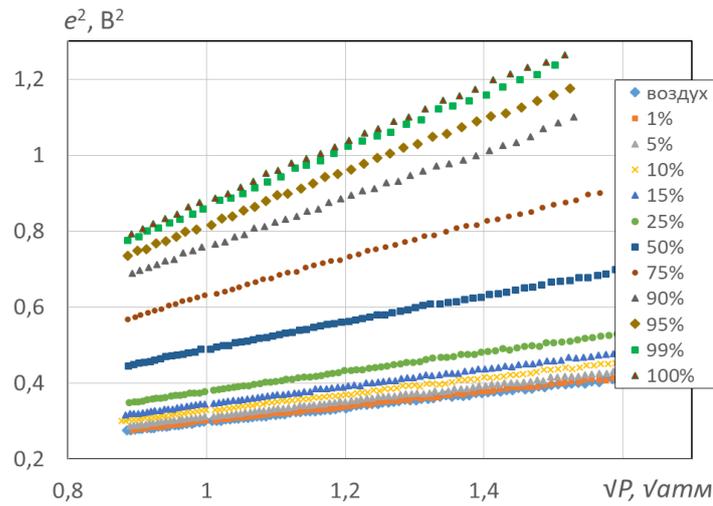


Рис. 4. Тарировки датчика концентрации для воздушно-гелиевой смеси в размерной форме  
 Fig. 4. Calibrations of the concentration sensor for an air-helium mixture in dimensional form

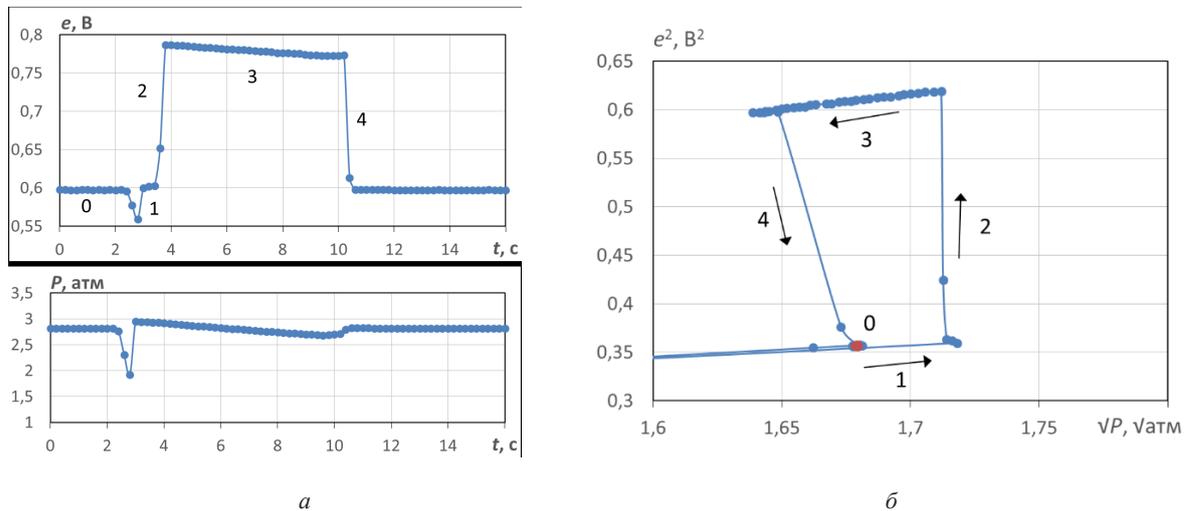


Рис. 5. Отклик датчика при ступенчатом изменении концентрации смеси на входе: данные по напряжению, давлению (а) и зависимость  $e^2 = f(\sqrt{P})$  (б)

Fig. 5. Response of the sensor with a step change in the concentration of the mixture: data on voltage, pressure (a) and the dependence  $e^2 = f(\sqrt{P})$  (b)

Так как при динамическом процессе сорбции гелия предполагается изменение концентрации компонент при протекании смеси через сорбционный слой, необходимо проверить отклик датчика на изменение концентрации в газовой смеси. Для этого был проведен следующий модельный эксперимент по определению отклика датчика концентрации на ступенчатое изменение концентрации компонент в смеси. В эксперименте через датчик попеременно пропускался воздух и воздушно-гелиевая смесь с концентрацией гелия 50 % об. Воздух подавался из трассы среднего давления, а смесь из ресивера, исходное давление воздуха в трассе и смеси в ресивере были приблизительно одинаковы и составляли 2,8 атм. Время опроса датчика в эксперименте составляло 0,2 секунды. На рис. 5 приведены графики изменения напряжения на чувствительном элементе, давления в канале датчика от времени и характеристическая зависимость квадрата напряжения от корня из давления во время подачи воздушно-гелиевой

смеси. В первоначальный момент времени через датчик протекает воздух, на графиках это соответствует моменту 0, на зависимости  $e^2 = f(\sqrt{P})$  точки лежат вдоль линии, характерной для чистого воздуха. В момент переключения на подачу воздушно-гелиевой смеси в канале датчика концентрации кратковременно падает давление, что приводит к уменьшению теплопотери на чувствительном элементе, и термоанемометр снижает напряжение на нем. Далее смесь поступает в канал, ведущий к датчику концентрации, и первоначально, как поршень, толкает находящийся там воздух, при этом давление в канале датчика возрастает, по датчику еще протекает воздух и на зависимости  $e^2 = f(\sqrt{P})$  точки ложатся на линию, характерную для воздуха, на графиках это соответствует моменту 1.

Когда воздушно-гелиевая смесь достигает чувствительного элемента датчика, теплопотери на нем значительно возрастают за счет более высокой теплопроводности смеси, термоанемометр компенсирует потери путем увеличения напряжения, это соответствует участку 2 на графиках. При этом на зависимости  $e^2 = f(\sqrt{P})$  происходит переход к характеристике для смеси (участок 2). Участок 3 соответствует протеканию воздушно-гелиевой смеси, так как смесь подается из ресивера, то давление постепенно снижается. Далее происходит обратное переключение на подачу воздуха и значения на зависимости  $e^2 = f(\sqrt{P})$  возвращаются в область, характерную для чистого воздуха. Данные эксперименты показывают отклик датчика на ступенчатое изменение концентрации смеси, в нашем случае характерное время реакции не превысило 0,4 секунды, что заведомо удовлетворяет требованиям экспериментов по исследованию динамических процессов сорбции, так как характерные времена сорбционных процессов составляют десятки секунд даже при повышенных температурах. В данной работе предельные характеристики датчика концентрации не исследовались. В целом же характерное время реакции складывается из характерных времен задержек в пневматической системе, частотной характеристики датчика давления и термоанемометра. При настройке термоанемометра частотная характеристика для шести микронного чувствительного элемента составляла порядка 10 кГц, характерные же частотные параметры датчиков давления составляют ~ 0,1–1 кГц, таким образом, оценочные частотные характеристики датчика концентрации могут быть довольно высоки.

Далее на описанном выше стенде были проведены эксперименты, направленные на отработку методики и моделирование динамического режима сорбции при течении гелийсодержащей смеси по селективно проницаемому слою из кремнеземных микросфер. В качестве рабочей смеси использовалась воздушно-гелиевая смесь с концентрацией гелия 50 % об. Процедура проведения эксперимента заключалась в следующем: через адсорбер с микросферами последовательно пропускается воздух, воздушно-гелиевая смесь, воздух. Давление на входе в адсорбер задавалось равным 5 атм. Датчик концентрации, подсоединенный к выходу адсорбера, фиксирует изменение концентрации компонент в протекающей смеси в ходе эксперимента. Для моделирования среды с различной гелиевой проницаемостью использовался нагрев кремнеземных микросфер, гелиевая проницаемость которых значительно зависит от температуры и увеличивается с ее повышением [4]. Увеличение гелиевой проницаемости микросфер должно приводить к размыванию фронта изменения концентрации в смеси. Эксперименты проводились при двух температурах адсорбера: комнатной 22 °С и при нагреве адсорбера до 70 °С. При таком изменении температур гелиевая проницаемость кремнеземных микросфер увеличивается в 3,5 раза.

Графики изменения напряжения на чувствительном элементе датчика от времени и характеристическая зависимость квадрата напряжения от корня из давления при протекании воздушно-гелиевой смеси через слой селективно проницаемых микросфер приведены на рис. 6.

По данным, представленным в координатах  $e^2$  от  $\sqrt{P}$ , можно проследить, как происходит достаточно плавное изменение концентрации в протекающем газе (область 1), от исходных значений для воздуха (область 0), до значений, характерных для смеси (область 2) и при обратном процессе (область 3). Дополнительный скачок на графиках изменения напряжения на чув-

ствительном элементе связан с переключением подачи смеси из ресивера, на подачу воздуха из трассы и последующим повышением давления. О размытии фронта концентрации в смеси можно косвенно судить по изменению теплотерь на чувствительном элементе датчика концентрации. На рис. 7 представлено изменение напряжения на чувствительном элементе датчика концентрации при течении воздушно-гелиевой смеси через слой микросфер в нормированном виде.

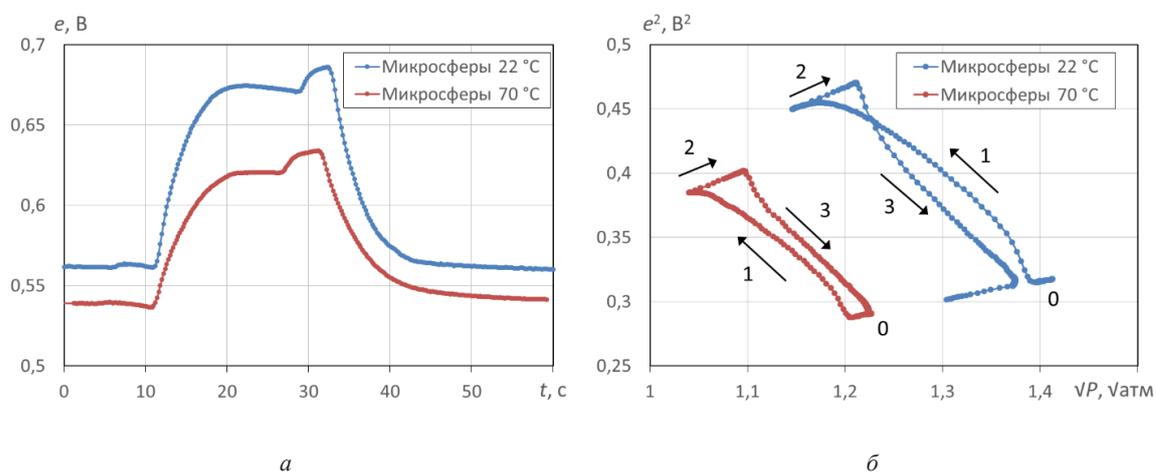


Рис. 6. Изменение напряжения на чувствительном элементе датчика концентрации (а) и зависимость  $e^2 = f(\sqrt{P})$  (б) при течении воздушно-гелиевой смеси через слой микросфер  
 Fig. 6. Change in voltage on the sensitive element of the concentration sensor (a) and the dependence  $e^2 = f(\sqrt{P})$  (б) during the flow of an air-helium mixture through a layer of microspheres

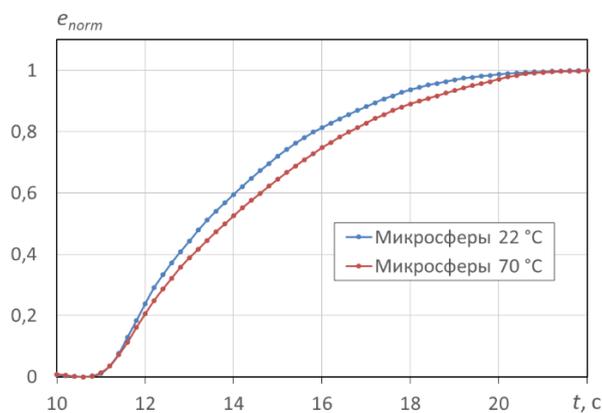


Рис. 7. Изменение напряжения на чувствительном элементе датчика концентрации при течении воздушно-гелиевой смеси через слой микросфер в нормированном виде  
 Fig. 7. Voltage change on the sensitive element of the concentration sensor during the flow of an air-helium mixture through a layer of microspheres in a normalized form

Как видно на графике, фронт волны концентрации с увеличением газопроницаемости микросфер становится более пологим, но величина этого изменения незначительна. В целом, на размытие фронта волны концентрации при течении смеси по среде из микросфер влияет несколько факторов. Первый – это различные параметры течения каждой компоненты в такой среде за счет вязкости газа. Второй непосредственно связан с поглощением гелия. Для наших параметров проведения эксперимента время протекания смеси по слою микросфер составило

порядка 10–15 секунд, что значительно меньше характерных времен протекания сорбционных процессов. При этом засыпка из микросфер образует довольно плотную среду, проницаемость которой составляет ~ 2 Дарси [6]. Поэтому в текущих экспериментах первый механизм размытия фронта концентрации значительно превалировал.



Рис. 8. Предлагаемая схема экспериментального стенда  
Fig. 8. The proposed scheme of the experimental stand

Для исследований по динамическому разделению гелийсодержащих смесей газов требуется увеличение времени прохождения смеси по сорбционному слою, что может быть достигнуто путем увеличения длины адсорбера. Предполагаемая схема универсального экспериментального стенда приведена на рис. 8, в котором адсорбер представляет собой длинную трубку с определенным радиусом изгиба. Трубка может состоять из нескольких сегментов различной длины, что позволяет набирать заданную длину путем стыковки между собой нескольких сегментов. Сечение трубок определяется исходя из требуемых расходных параметров газа и измерительного оборудования, максимального перепада давления на входе и выходе.

### Заключение

В ходе проведения работы протестированы и отработаны основные элементы для реализации динамического режима сорбции. На основе разработанного в ИТПМ СО РАН датчика концентрации для бинарных смесей газов отработана методика по измерению концентрации в газовой смеси непосредственно в темпе эксперимента. Проведено тестирование датчика концентрации, получены тарировочные зависимости для воздушно-гелиевой смеси. Определены параметры отклика датчика на ступенчатое изменение концентрации гелия в смеси, время реакции составило менее 0,4 секунды. Развитие системы измерения концентрации требует применения тарировочных зависимостей в критериальной форме, что позволит сделать ее более универсальной, исключить влияние температуры.

Проведены эксперименты по моделированию динамического режима сорбции при течении гелийсодержащей смеси по селективно проницаемому слою из кремнеземных микросфер. По результатам экспериментов даны рекомендации по подготовке специального стенда для проведения исследований по динамическому разделению гелийсодержащих смесей газов на основе мембранно-сорбционного метода. Для кремнеземных микросфер требуется увеличение времени прохождения смеси по сорбционному слою, что может быть достигнуто путем увеличения длины адсорбера.

### Список литературы

1. **Фомин В.М., Зиновьев В.Н., Казанин И.В., Лебига В.А., и др.** Способ разделения многокомпонентной парогазовой смеси. Патент РФ № 2508156, 27.02.2014.

2. **Зиновьев В. Н., Казанин И. В., Пак А. Ю. и др.** Проницаемость полых микросферических мембран по отношению к гелию // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 1. С. 24–36.
3. **Верещагин А. С., Казанин И. В., Зиновьев В. Н., Фомин В. М.** Численное моделирование обогащения воздушно-гелиевой смеси бифункциональным сорбентом на основе стеклянных микросфер // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 5. С. 3–19.
4. **Фролов М. В., Верещагин А. С., Казанин И. В.** Определение гелиевой проницаемости кремнеземных микросфер // Теплофизика и аэромеханика. 2024. Т. 31, № 2. С. 347–353.
5. **Лебига В. А., Зиновьев В. Н., Пак А. Ю., Конкин А. Я., Приходько Ю. М.** Датчик для измерения концентрации компонентов газовой смеси. Патент РФ № 2012127052/28, 10.01.2014.
6. **Kazanin I. V., Zinoviev V. N., Lebiga V. A. et al.** Experimental investigation of transport and helium permeability for hollow microspherical membranes // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1893, № 1. P. 030013.

### References

1. **Fomin V. M., Zinoviev V. N., Kazanin I. V., Lebiga V. A., et al.** Method for separating a multicomponent vapor-gas mixture. *Russian Federation Patent No. 2508156*, 02.27.2014. (in Russ.)
2. **Zinoviev V. N., Kazanin I. V., Pak A. Yu., et al.** Permeability of hollow microspherical membranes to helium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, vol. 89, № 1, pp. 25–37. (in Russ.)
3. **Vereshchagin A. S., Kazanin I. V., Zinovyev V. N., Fomin V. M.** Numerical simulation of enrichment of the air–helium mixture with a bifunctional sorbent based on glass microspheres. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2022, vol. 63, № 5, pp. 731–745. (in Russ.)
4. **Frolov M. V., Vereshchagin A. S., Kazanin I. V.** Study of helium permeability for silica microspheres. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2024, vol. 31, № 2, pp. 321–327. (in Russ.)
5. **Lebiga V. A., Zinoviev V. N., Pak A. Yu., Konkin A. Ya., Prihodko Yu. M.** Sensor for measuring the concentration of gas mixture components. *Russian Federation Patent No. 2012127052/28*, 10.01.2014. (in Russ.)
6. **Kazanin I. V., Zinoviev V. N., Lebiga V. A. et al.** Experimental investigation of transport and helium permeability for hollow microspherical membranes. *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1893, no. 1, p. 030013.

### Сведения об авторах

**Казанин Иван Викторович**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

**Щиглова Елизавета Павловна**, лаборант

**Журавлева Даниэла Владимировна**, лаборант

### Information about the Authors

**Ivan V. Kazanin**, PhD (Physics and Mathematics), Researcher

**Elizaveta P. Shchiglova**, Laboratory Assistant

**Daniela V. Zhuravleva**, Laboratory Assistant

*Статья поступила в редакцию 18.11.2024;*

*одобрена после рецензирования 25.11.2024; принята к публикации 05.12.2024*

*The article was submitted 18.11.2024;*

*approved after reviewing 25.11.2024; accepted for publication 05.12.2024*

Научная статья

УДК 544.452.42

DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-47-55

## Режимы горения микроструй водорода

Юрий Алексеевич Литвиненко

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Новосибирск, Россия

litur@itam.nsc.ru

### Аннотация

Выполнено экспериментальное исследование диффузионного факела при истечении водорода из круглого и щелевого микросопла при до- и сверхзвуковой скорости. Впервые обнаружены четыре сценария диффузионного горения плоской микроструи водорода, включая горение при сверхзвуковом истечении струи водорода. Установлено, что стабилизация факела при дозвуковой скорости истечения микроструи водорода связана с наличием «перетяжки» факела, разделяющей ламинарную и турбулентную части факела. При сверхзвуковой скорости истечения недорасширенной микроструи стабилизации факела способствует образующаяся волновая структура неоднородностей. Обнаружен гистерезис процесса диффузионного горения плоской микроструи водорода в зависимости от области поджига. При поджиге вблизи среза сопла реализуется присоединенный факел, сопровождаемый нагревом сопла. При поджиге выше по струе реализуется поднятый факел, при этом нагрев среза сопла значительно меньше предыдущего случая. С ростом скорости истечения развитие двух типов факелов протекают по разным сценариям.

### Ключевые слова

круглая микроструя, плоская микроструя, диффузионное горение водорода, «перетяжка» факела, теневой метод, тепловизионная картина горения

### Финансирование

Исследование выполнено за счет проекта «Восприимчивость и развитие возмущений в сдвиговых дозвуковых потоках» № 124021400038-1.

### Для цитирования

Литвиненко Ю. А. Режимы горения микроструй водорода // Сибирский физический журнал. 2025. Т. 20, № 1. С. 47–55. DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-47-55

## Combustion Modes of Hydrogen Microjets

Yury A. Litvinenko

S. A. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS,

Novosibirsk, Russian Federation

litur@itam.nsc.ru

### Abstract

An experimental study of the diffusion plume during the hydrogen flow from a round and slotted micro nozzle at pre- and supersonic velocity has been carried out. Four scenarios of diffusion combustion of a planar hydrogen microjet, including combustion at supersonic hydrogen jet outflow, are found for the first time. It was found that the stabilization of the plume at subsonic hydrogen microjet velocity is associated with the presence of a plume “drag” separating the

© Литвиненко Ю. А., 2025

laminar and turbulent parts of the plume. At supersonic velocity of the underexpanded microjet, the plume stabilization is promoted by the wave structure of inhomogeneities formed. The hysteresis of the diffusion combustion process of a flat hydrogen microjet has been found depending on the ignition region. At ignition near the nozzle cutoff, a connected plume accompanied by nozzle heating is realized. At ignition higher up the jet, a raised flare is realized, with heating of the nozzle cutoff being much less than in the previous case. With increasing flow velocity, the development of the two types of flares proceeds according to different scenarios.

#### Keywords

circular microjet, flat microjet, diffusive hydrogen combustion, flame “drag”, shadow method, thermal imaging combustion pattern

#### Funding

The research was supported by the project “Susceptibility and development of perturbations in shear subsonic flows” № 1240214.

#### For citation

Litvinenko Yu. A. Combustion Modes of Hydrogen Microjets. *Siberian Journal of Physics*, 2025, vol. 20, no. 1, p. 47–55. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-47-55

## Введение

Развитие водородной энергетики обусловлено не только назревшим переходом к освоению нового экологически приемлемого источника энергии, но и достижением более эффективного использования традиционных видов топлива, а также новых видов биотоплива на основе смеси газов с водородом. Немаловажным также является стремление к дальнейшей декарбонизации атмосферного воздуха (снижению доли «парниковых» выбросов углекислого газа). С этой целью осуществляется сокращение потребления мазута, нефти и угля. Осуществляется их замена экологически приемлемым природным газом. Следует также отметить развитие возобновляемых источников энергии. Солнечная, ветровая, гидрогенерирующая энергетика являются необходимым, но недостаточным шагом на пути декарбонизации. Суммарная доля такой энергии составляет ~ 20 % из общего баланса потребляемой энергии. В этой связи, учитывая огромные запасы водорода в Мировом океане, возникает значительный интерес к развитию абсолютно экологически чистых источников энергии. Однако на пути развития технологии водородопользования немало нерешенных задач. Одна из них – высокая взрывоопасность водорода. Производство, хранение и транспортировка водорода связаны с рядом проблем, обусловленных высокой степенью диффузии. Водород активно взаимодействует с углеродом, содержащимся в стали, превращая его в метан. Также следует отметить, что водород способен воспламеняться от значительного перепада давления (ударной волны), образующегося при даже незначительной разгерметизации баллона. На пути развития технологий использования водорода немало сопутствующих проблем, требующих решения. Целью настоящей работы является исследование структуры водородного факела при струйном истечении из круглого и плоского микросопла с до- и сверхзвуковыми скоростями. Полученные результаты позволят предложить новые технологические решения для сжигания газообразного водорода при истечении со скоростями, близкими

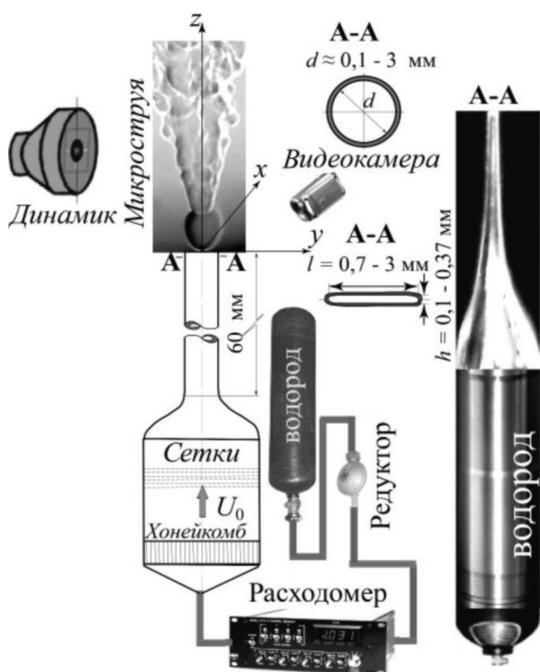


Рис. 1. Установка для исследования горения микроструи водорода

Fig. 1. Hydrogen microjet combustion research facility

к скорости звука при диффузионном горении, для стабильного и безопасного сжигания газообразного водорода в воздушной среде. В настоящей работе представлены результаты исследований диффузионного горения микроструй водорода. Под микроструями понимаются истечения из сопла, имеющего плоское либо круглое поперечное сечение и поперечный размер менее 3 мм (рис. 1). Основные результаты были получены с использованием теневого метода на базе оптического прибора ИАБ-451 (рис. 2).

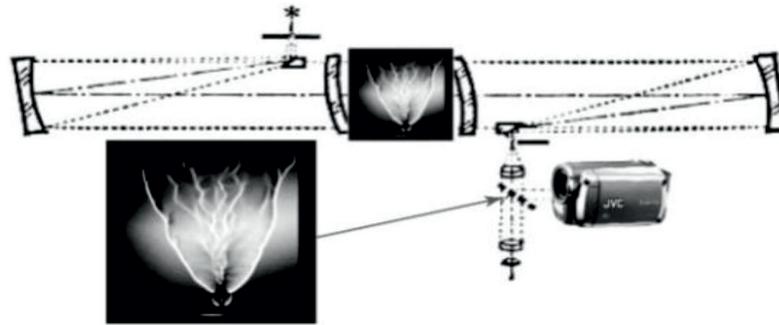


Рис. 2. Схематическое изображение прибора ИАБ-451 и теньевая картина горения водорода в плоской микроструе  
Fig. 2. Schematic representation of the IAB-451 device and shadow picture of hydrogen combustion in a flat microjet

### Структура течения и режимы горения микроструй водорода, истекающих из сопла круглого сечения

При изучении струйного течения и горения водорода с использованием круглых и щелевых сопел была обнаружена такая особенность структуры течения и горения, как возникновение области «перетяжки» пламени. Это явление отмечено в работах [1; 2] без детального анализа его характеристик. Область «перетяжки» пламени представляет собой близкую к сферической зону ламинарного течения вблизи среза микросопла (рис. 3, 4).

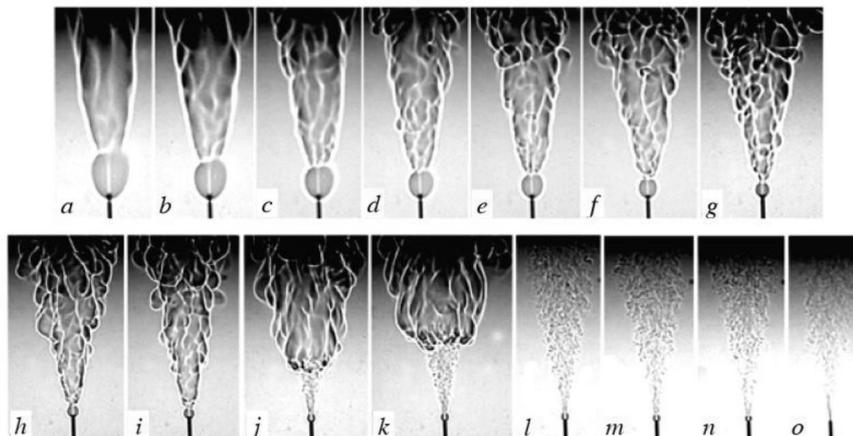
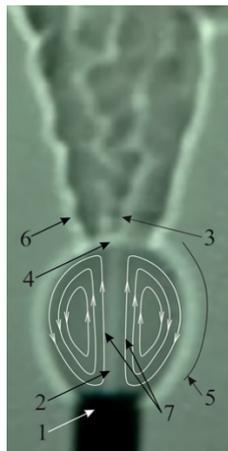


Рис. 3. Теньевые картины горения водорода, истекающего из круглого отверстия диаметром 500 мкм, при различной скорости истечения струи (м/с): а) 357; б) 408; в) 459; д) 510; е) 561; ф) 612; г) 663; h) 714; и) 765; j) 816; k) 867; l) 887; m) 918; n) 969; o) 1020; наличие области «перетяжки» пламени (а – n); отрыв пламени при горении в области «перетяжки» пламени (i – k); прекращение горения турбулентной струи при сохранении горения в области «перетяжки» пламени (l – n); прекращение горения струи (o)

Fig. 3. Shadow patterns of combustion of hydrogen flowing from a circular hole of 500  $\mu\text{m}$  diameter at different jet velocities (m/s): (a) 357; (b) 408; (c) 459; (d) 510; (e) 561; (f) 612; (g) 663; (h) 714; (i) 765; (j) 816; (k) 867; (l) 887; (m) 918; (n) 969; (o) 1020; presence of flame “drag” region (a – n); flame detachment during combustion in the flame “drag” region (i – k); cessation of combustion of a turbulent jet while combustion remains in the flame “tug” region (l – n); cessation of jet combustion (o)

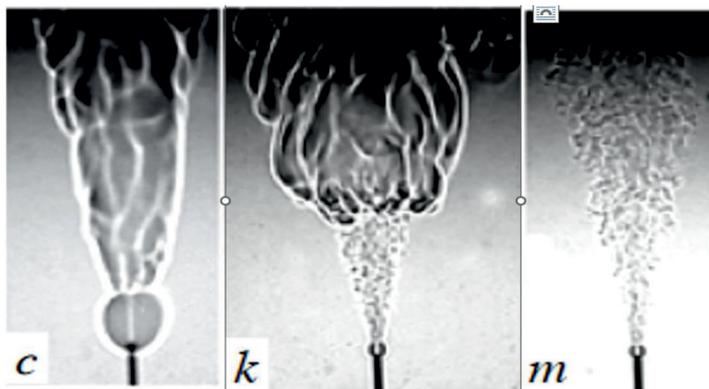
В пределах этой зоны течение в струе ламинарное, горение происходит в ламинарном режиме, на периферии струи происходит формирование тороидальных вихрей (см. рис. 3). Сферическая область течения окружена тонким слоем с большим градиентом плотности среды, при преодолении которого ламинарная струя разрушается и происходит переход к режиму турбулентного течения и горения.



*Рис. 4.* Теневая фотография круглой микроструи водорода вблизи среза сопла: 1 – сопло; 2 – ламинарная струя; 3 – турбулентная струя; 4 – градиент плотности; 5 – узкая область градиента; 6 – турбулентное пламя; 7 – тороидальные вихри

*Fig. 4.* Shadow photograph of a round hydrogen microjet near the nozzle cutoff: 1 – nozzle; 2 – laminar jet; 3 – turbulent jet; 4 – density gradient; 5 – narrow gradient region; 6 – turbulent flame; 7 – toroidal vortices

Результаты исследований показали, что подобная структура струйного течения наблюдается в широком диапазоне значений параметров (поперечного размера сопла и скорости истечения (объемного расхода) водорода). Характерные картины течения вблизи среза сопла в условиях образования области «перетяжки» пламени и в ее отсутствие показаны на рис. 3. На рис. 4 показаны детали сценариев: при скорости истечения водорода 459 м/с – горение вблизи сопла, переход к турбулентности и турбулентное горение; при скорости 867 м/с – горение вблизи сопла, отсутствие горения в турбулентной зоне, но с остаточным горением в верхней части струи; при скорости 918 м/с – горение только вблизи сопла.



*Рис. 5.* Теневые картины диффузионного горения водорода, истекающего из круглого отверстия диаметром 500 мкм, при различной скорости истечения струи: 459 м/с (слева); 867 м/с (в центре); 918 м/с (справа)

*Fig. 5.* Shadow patterns of diffusive combustion of hydrogen flowing from a circular hole with a diameter of 500  $\mu\text{m}$  at different jet velocities: 459 m/s (left); 867 m/s (center); 918 m/s (right)

В работе [3] предполагалось, что особенности течения могут быть обусловлены в том числе его начальным состоянием – распределением средней скорости струи на срезе сопла. Результаты проведенных исследований позволяют сделать вывод о том, что пространственная структура горения зависит от длины канала микросопла: по мере ее увеличения наблюдается исчезновение области «перетяжки» пламени. Зависимость режима горения микроструй водорода от условий на срезе сопла описана ниже.

В целом экспериментальные исследования диффузионного горения круглой микроструи водорода [4–8] показали наличие различных сценариев протекания данного процесса в зависимости от нарастания скорости истечения микроструи в диапазоне диаметров выходного отверстия от 0,25 до 1 мм. Обнаружены следующие сценарии диффузионного горения круглой микроструи водорода.

1. Горение чисто ламинарной микроструи с наличием ламинарного пламени большой дальности ( $U_0 \leq 150$  м/с).
2. Возникновение сферической «области перетяжки пламени» с наличием в ней ламинарной микроструи и ламинарного пламени с турбулизацией микроструи и пламени при преодолении ламинарной микроструей узкой области градиента плотности газа ( $U_0 > 150$  м/с).
3. Отрыв турбулентного пламени от области перетяжки пламени ( $U_0 > 200$  м/с).
4. Прекращение горения турбулентного участка микроструи при сохранении горения в области перетяжки пламени. Причем в данной ситуации горение в области перетяжки пламени сохраняется вплоть до трансзвуковых скоростей ее истечения, однако при наличии такого явления, как «запирание сопла» [1;8] ( $U_0 > 330$  м/с).
5. Прекращение горения микроструи ( $U_0 \approx 330$  м/с).

### Особенности диффузионного горения микроструи водорода, истекающей из щелевого микросопла

Аналогичные сценарии горения были обнаружены и при диффузионном горении плоской микроструи водорода [2; 5]. Следует заметить, что запирание сопла происходило при достижении скорости истечения микроструи водорода, близкой к скорости звука в воздухе ( $U_0 \approx 330$  м/с). Стабилизация горения как круглой, так и плоской микроструи обеспечивалась

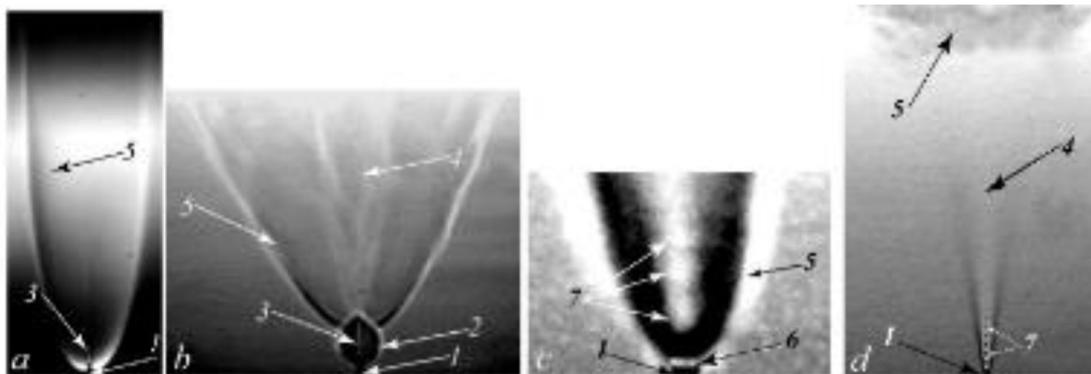


Рис. 6. Четыре сценария диффузионного горения плоской водородной микроструи при изменении ее скорости:  $U_0 \leq 150$  м/с (а),  $U_0 = 150$  м/с (б),  $U_0 = 330$  м/с (с) и  $U_0 = 1280$  м/с (д); 1 – микроджет; 2 – «узкая область пламени»; 3 – ламинарная микроструя; 4 – турбулентная микроструя; 5 – пламя; 6 – поднятое пламя; 7 – сверхзвуковые ячейки

Fig. 6. Four scenarios of diffusive combustion of a flat hydrogen microjet when its velocity changes:  $U_0 \leq 150$  m/s (a),  $U_0 = 150$  m/s (b),  $U_0 = 330$  m/s (c), and  $U_0 = 1280$  m/s (d); 1 – microjet; 2 – “narrow flame region”; 3 – laminar microjet; 4 – turbulent microjet; 5 – flame; 6 – raised flame; 7 – supersonic cells

в данной ситуации наличием области перетяжки пламени и существованием в ней горения. Тем не менее нам не удалось выйти на сверхзвуковое истечение микроструи водорода по причине запирания сопла областью перетяжки пламени, которая приводила к нагреву микросопла и предотвращала отрыв пламени от его среза. Одной из характеристик горения струйного течения при сверхзвуковом истечении, наряду с рядом других, является наличие сверхзвуковых структур как в струе, так и в пламени, но в ситуации отрыва пламени от среза сопла. Это детально продемонстрировано в работах [1; 3] при поджигании круглой микроструи водорода вдали от среза сопла. В данной ситуации можно было наблюдать наличие сверхзвуковых ячеек как в струе, так и в оторвавшемся от среза сопла пламени.

В результате экспериментальных исследований получены четыре сценария диффузионного горения плоской микроструи водорода, включая горение при наличии сверхзвуковых ячеек, как по воздуху, так и по водороду (рис. 6).

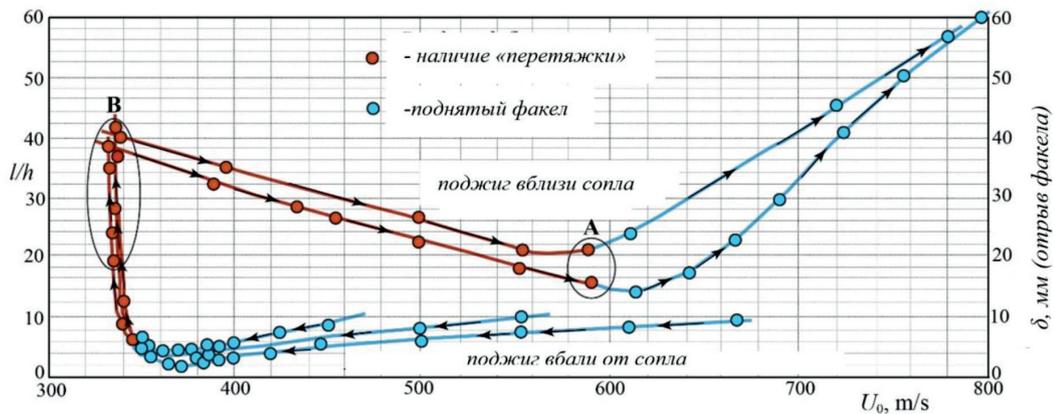


Рис. 7. График (гистерезис) зависимости пламени: развитие водородной микроструи в зависимости от скорости истечения и способ воспламенения (вблизи/вдали от среза сопла, диапазон скоростей (A) исчезновения сужения пламени область и начало отделиения пламени и внешний вид (B) области сужения пламени. Стрелки указывают направление изменений в микроструе

Fig. 7. Graph of the dependence (hysteresis) of the development of a hydrogen microjet flame as a function of expulsion velocity and ignition method (near/far from the nozzle cutoff, velocity range (A) disappearance of the flame constriction region and the beginning of flame separation and appearance (B) of the flame constriction region. Arrows indicate the direction of change in the microjet

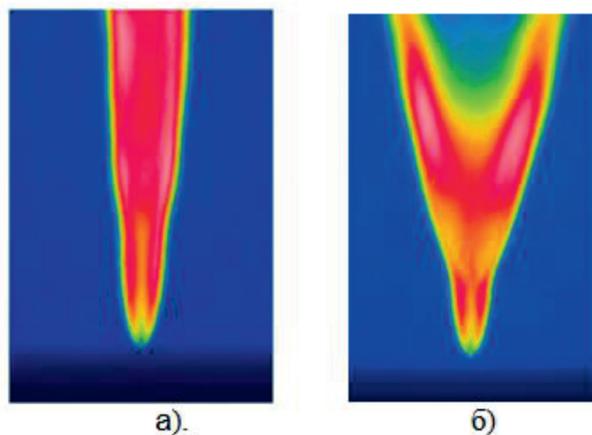
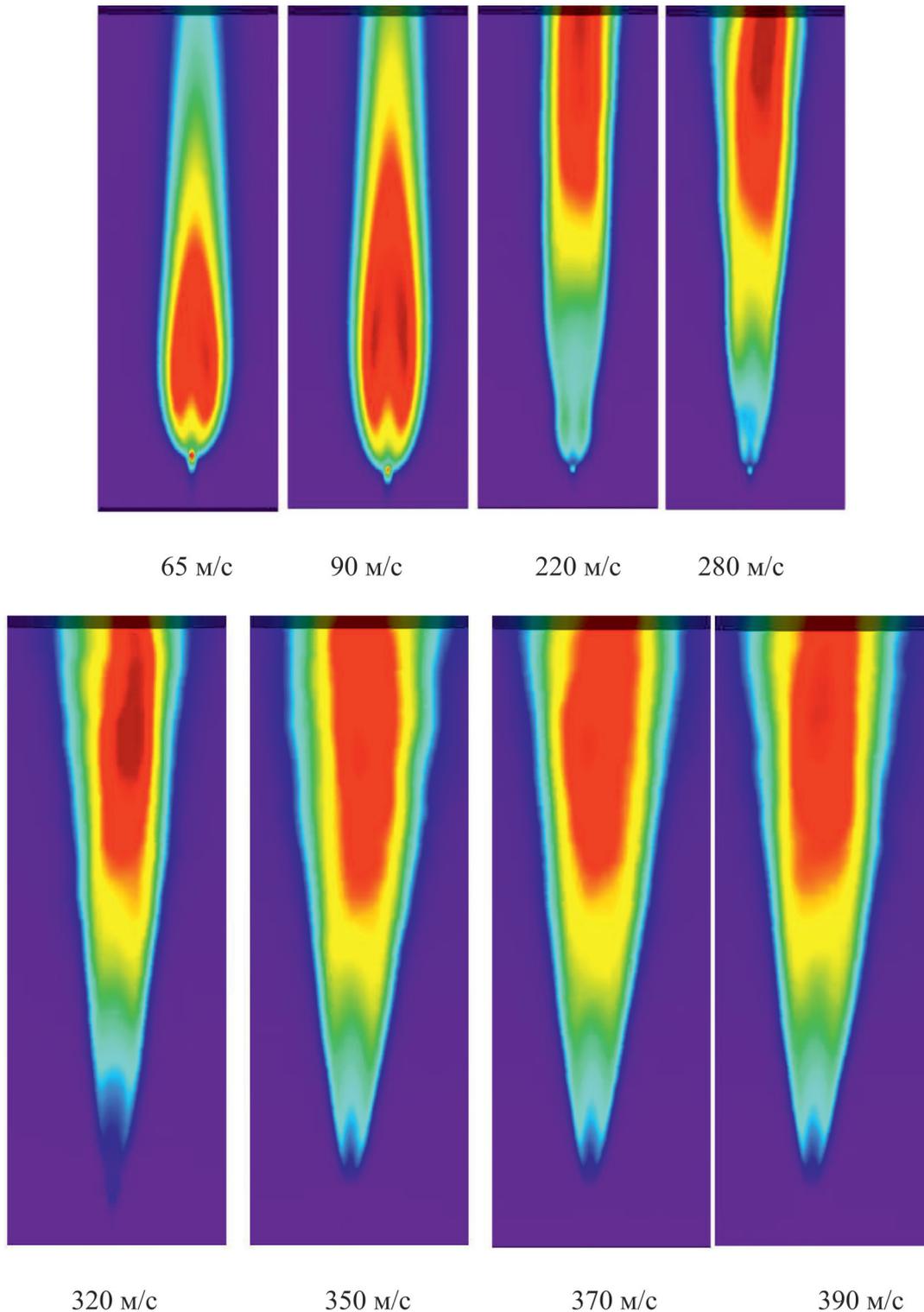


Рис. 8. Влияние акустического поля на форму пламени при скоростях истечения водорода менее 150 м/с (а) без акустического поля, (б) с наложенным акустическим полем (амплитуда 95 дБ,  $f = 5500$  Hz) (вид на узкую грань)

Fig. 8. Effect of acoustic field on the flame shape at hydrogen flow velocities less than 150 m/s (a) without acoustic field, (b) with superimposed acoustic field (amplitude 95 dB,  $f = 5500$  Hz) (narrow edge view)



*Рис. 9.* Визуализация горения водорода с помощью тепловизора CEM DT-9897H для различных скоростей потока водорода  
*Fig. 9.* Visualization of hydrogen combustion with the CEM DT-9897H thermal imager for different hydrogen flow rates

Для этого размера сопла при скоростях истечения водорода менее 150 м/с первого режима (сценария) истечения водорода было дополнительно найдено влияние акустического поля

на структуру плоской струи. Измерения в этом случае были проведены с использованием тепловизора, показывающего топологию пламени (рис. 8).

Для сравнения, в рамках этого исследования, был рассмотрен случай микросопла с размерами в шесть раз меньшими ( $0,400$  на  $0,07$  мм<sup>2</sup>). На рис. 6 приведены снимки, полученные с использованием тепловизора, пламени такой струи (вид на узкую грань). Как показали исследования, в диапазоне скоростей  $320$ – $370$  м/с также наблюдается гистерезис в зависимости от способа поджигания микроструи (вблизи или вдали от среза сопла) и направления изменения скорости ее истечения (роста или уменьшения) (рис. 7). Отметим, что сценарии диффузионного горения для этого случая были другими и повторяли сценарии для круглого микросопла с диаметром  $30$  микрон (см. работу [7]).

Таким образом, при воздействии периодическим акустическим сигналом с частотой от  $10$  Гц до  $20$  КГц эффект расщепления или влияния отсутствовал во всем диапазоне скоростей (рис. 9).

Результаты сравнения показывают, с одной стороны, на возможность применимости тепловизора (мы видим нагретое сопло и топологию пламени), с другой стороны, на необходимость в дальнейшем подробных исследований этих случаев.

### Заключение

Подводя итог этой части проведенных исследований, необходимо констатировать тот факт, что экспериментально обнаружено новое физическое явление микроструйного диффузионного горения водорода с нагревом сопла, обеспечивающее стабилизацию горения вплоть до трансзвуковых скоростей истечения водорода. Обнаруженный режим может быть использован для различных технологических целей, таких как организация эффективного перемешивания различных потоков и их подогрев. В таком режиме сгорает только небольшая часть водорода, а остальная смешивается с продуктами горения и воздухом, в результате чего температура такой смеси может варьироваться (путем подбора скорости потока и диаметра сопла) от близкой к начальной до температуры самовоспламенения водорода. Кроме того, такая система может служить своеобразным реактором для осуществления, например, в мягких и контролируемых условиях различных термолитических реакций, таких как синтез наночастиц металлов и оксидов металлов из летучих металлосодержащих прекурсоров, обработка углеводородного сырья и др. Также такие системы могут быть использованы для организации эффективного смешения топлива с воздухом и подогрева такой смеси для летательных аппаратов и других горелочных устройств.

### Список литературы

1. **Kozlov V. V., Grek G. R., Kozlov G. V., Litvinenko Yu. A., Shmakov A. G.** Experimental study on diffusion combustion of high-speed hydrogen round microjets // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2019. Vol. 44 (1). P. 457.
2. **Kozlov V. V., Grek G. R., Korobeinichev O. P., Litvinenko Yu. A., Shmakov A. G.** Features of diffusion combustion of hydrogen in the round and plane high-speed microjets (Part II) // *International Journal of Hydrogen Energy*. Elsevier, 2016. Vol. 41, iss. 44. P. 20240–20249.
3. **Козлов В. В., Грек Г. Р., Козлов Г. В., Литвиненко Ю. А., Шмаков А. Г.** Экспериментальное исследование диффузионного горения круглой микроструи водорода при ее зажигании вдали от среза сопла // *Сибирский физический журнал*. 2017. Т. 12, № 3. С. 62–73.
4. **Шмаков А. Г., Грек Г. Р., Козлов В. В., Коробейничев О. П., Литвиненко Ю. А.** Различные режимы диффузионного горения круглой струи водорода в воздухе // *Вестн. НГУ. Серия: Физика*. 2015. Т. 10, вып. 2. С. 27–41.

5. Литвиненко Ю. А., Грек Г. Р., Козлов В. В., Коробейничев О. П., Шмаков А. Г. Структура присоединенного диффузионного пламени микроструи водорода, истекающей из щелевого сопла // Вестн. НГУ. Серия: Физика. 2015. Т. 10, вып. 2. С. 52–66.
6. Грек Г. Р., Катасонов М. М., Козлов Г. В., Литвиненко М. В. Диффузионное горение водорода (круглое скошенное сопло) // Вестн. НГУ. Серия: Физика. 2015. Т. 10, вып. 2. С. 42–51.
7. Kozlov V. V., Grek G. R., Korobeinichev O. P., Litvinenko Yu. A., Shmakov A. G. Combustion of a high-velocity hydrogen microjet effluxing in air // *Doklady Physics*. 2016. Vol. 61, iss. 9. P. 457–462.
8. Шмаков А. Г., Грек Г. Р., Козлов В. В., Козлов Г. В., Литвиненко Ю. А. Экспериментальное исследование диффузионного горения высокоскоростной круглой микроструи водорода. Ч. 1. Присоединенное пламя, дозвуковое течение // Сибирский физический журнал. 2017. Т. 12, № 2. С. 28–45.

### References

1. Kozlov V. V., Grek G. R., Kozlov G. V., Litvinenko Yu. A., Shmakov A. G. Experimental study on diffusion combustion of high-speed hydrogen round microjets. *International Journal of Hydrogen Energy*, Elsevier, 2019, vol. 44, iss. 1, p. 457.
2. Kozlov V. V., Grek G. R., Korobeinichev O. P., Litvinenko Yu. A., Shmakov A. G. Features of diffusion combustion of hydrogen in the round and plane high-speed microjets (Part II). *International Journal of Hydrogen Energy*. Elsevier, 2016, vol. 41, iss. 44, pp. 20240–20249.
3. Kozlov V. V., Grek G. R., Kozlov G. V., Litvinenko Yu. A., Shmakov A. G. Experimental study of diffusion combustion of a round hydrogen microjet during its ignition far from the nozzle cutoff. *Siberian Physical Journal*, 2017, vol. 12, № 3, pp. 62–73. (in Russ.)
4. Shmakov A. G., Grek G. R., Kozlov V. V., Korobeinichev O. P., Litvinenko Yu. A. Various modes of diffusion combustion of a round hydrogen jet in air. *Vestnik. NSU. Series: Physics*, 2015, vol. 10, iss. 2, pp. 27–41. (in Russ.)
5. Litvinenko Y. A., Grek G. R., Kozlov V. V., Korobeinichev O. P., Shmakov A. G. Structure of the attached diffusion flame of a hydrogen microjet flowing from a slot nozzle. *Vestnik NSU. Series: Physics*, 2015, vol. 10, iss. 2, pp. 52–66. (in Russ.)
6. Grek G. R., Katasonov M. M., Kozlov G. V., Litvinenko M. V. Diffusion combustion of hydrogen (round beveled nozzle). *Vestnik NSU. Series: Physics*, 2015, vol. 10, iss. 2, pp. 42–51.
7. Kozlov V. V., Grek G. R., Korobeinichev O. P., Litvinenko Yu. A., Shmakov A. G. Combustion of a high-velocity hydrogen microjet effluxing in air. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, iss. 9, pp. 457–462.
8. Shmakov A. G., Grek G. R., Kozlov V. V., Litvinenko Y. A. Experimental study of diffusion combustion of a high-speed round hydrogen microjet. Part 1. Attached flame, subsonic flow. *Siberian Physical Journal*, 2017, vol. 12, № 2, pp. 28–45. (in Russ.)

### Сведения об авторе

Литвиненко Юрий Алексеевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник

### Information about the Author

Yury A. Litvinenko, Doctor of Science (Physics and Mathematics), Leading Researcher

Статья поступила в редакцию 09.12.2024;

одобрена после рецензирования 12.12.2024; принята к публикации 19.12.2024

The article was submitted 09.12.2024;

approved after reviewing 12.12.2024; accepted for publication 19.12.2024

Научная статья

УДК 537.6/.8

DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-56-66

## Изучение изменения магнитной проницаемости нержавеющей стали при различных технологических процессах

Ксения Константиновна Рябченко<sup>1</sup>, Алексей Юрьевич Пахомов<sup>2</sup>  
Константин Владимирович Жилиев<sup>3</sup>, Александр Анатольевич Старостенко<sup>4</sup>  
Александр Сергеевич Цыганов<sup>5</sup>

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН  
Новосибирск, Россия

<sup>1</sup>K.K.Ryabchenko@inp.nsk.su

<sup>2</sup>A.Yu.Pakhomov@inp.nsk.su

<sup>3</sup>K.V.Zhilyaev@inp.nsk.su

<sup>4</sup>A.A.Starostenko@inp.nsk.su

<sup>5</sup>A.S.Tsygunov@inp.nsk.su

### Аннотация

В данной статье представлено изучение влияния внешних воздействий, таких как отжиг в печи, шлифовка, TIG- и электронно-лучевая сварки на магнитную проницаемость нержавеющей стали аустенитного класса. Подробно описан процесс измерения и определения магнитных свойств стали. Помимо этого показана необходимость проведения дополнительной обработки нержавеющей стали для изменения ее магнитных свойств.

### Ключевые слова

калибровочный дипольный магнит, датчики ЯМР, магнитное поле, магнитная проницаемость, магнитная восприимчивость, нержавеющая сталь, TIG-сварка, электронно-лучевая сварка, отжиг, вакуумный отжиг

### Для цитирования

Рябченко К. К., Пахомов А. Ю., Жилиев К. В., Старостенко А. А., Цыганов А. С. Изучение изменения магнитной проницаемости нержавеющей стали при различных технологических процессах // Сибирский физический журнал. 2025. Т. 20, № 1. С. 56–66. DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-56-66

## Study of Changes in the Magnetic Permeability of Stainless Steel During Various Technological Processes

Ksenia K. Riabchenko<sup>1</sup>, Alexey Yu. Pakhomov<sup>2</sup>, Konstantin V. Zhilyaev<sup>3</sup>,  
Alexander A. Starostenko<sup>4</sup>, Alexander S. Tsyganov<sup>5</sup>

Budker Institute of Nuclear Physics of SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>1</sup>K.K.Ryabchenko@inp.nsk.su

<sup>2</sup>A.Yu.Pakhomov@inp.nsk.su

<sup>3</sup>K.V.Zhilyaev@inp.nsk.su

<sup>4</sup>A.A.Starostenko@inp.nsk.su

<sup>5</sup>A.S.Tsygunov@inp.nsk.su

### Abstract

This article presents a study of the influence of external treatment such as: annealing in a furnace, grinding, argon and electron beam welding on the magnetic permeability of austenitic stainless steel. The process of measuring and deter-

© Рябченко К. К., Пахомов А. Ю., Жилиев К. В., Старостенко А. А., Цыганов А. С., 2025

mining the magnetic properties of steel is described in detail. In addition, the need for additional processing of stainless steel to change its magnetic properties was shown.

#### Keywords

calibration dipole magnet, NMR sensors, magnetic field, magnetic permeability, magnetic susceptibility, stainless steel, TIG welding, electron beam welding, annealing, vacuum annealing

#### For citation

Riabchenko K. K., Pakhomov A. Yu., Zhilyaev K. V., Starostenko A. A., Tsyganov A. S. Study of changes in the magnetic permeability of stainless steel during various technological processes. *Siberian Journal of Physics*, 2025, vol. 20, no. 1, p. 56–66. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-56-66

## Введение

Вакуумные материалы являются неотъемлемой частью многих промышленных процессов и научных исследований. Они используются для создания и поддержания вакуума внутри различного рода устройств и систем, что позволяет достичь определенных целей, таких как очистка, оптическое покрытие, синтез наноматериалов и других процессов, требующих особых условий.

Нержавеющая сталь является одним из наиболее популярных материалов для использования в вакуумных системах. Одной из ее особенностей является устойчивость к коррозии. Благодаря содержанию хрома и никеля в составе образуется защитная пленка на поверхности материала, которая предотвращает контакт с воздухом и водой, что гарантирует долгую эксплуатацию и сохранение магнитной проницаемости стали.

Магнитная проницаемость – это свойство материала, определяющее его способность пропускать магнитные силовые линии. Нержавеющая сталь, благодаря особым химическим и структурным свойствам, обладает относительно низкой магнитной проницаемостью, это означает, что она слабо притягивается к магниту. Данное свойство делает ее идеальным материалом для приборов и устройств, где требуется минимальное взаимодействие с магнитными полями.

Однако в зависимости от состава существует несколько видов нержавеющей стали. Например, чистая аустенитная нержавеющая сталь (немагнитная) имеет низкую магнитную проницаемость и практически не притягивается к магниту, однако добавление хрома и никеля может повысить ее магнитную проницаемость. Также существует ферритная нержавеющая сталь (магнитная), которая может иметь достаточно высокую магнитную проницаемость и некоторую степень притяжения к магниту.

Содержание элементов в стали должно быть определенным образом сбалансировано, чтобы достигнуть желаемых магнитных свойств. Например, нержавеющая сталь с высоким содержанием хрома и низким содержанием никеля будет иметь высокую магнитную проницаемость, но при этом может потерять свою коррозионную стойкость.

Определенные химические элементы также могут влиять на немагнитные свойства стали. Например, добавление молибдена может снизить магнитную проницаемость стали и улучшить ее устойчивость к коррозии. Другие элементы, такие как марганец и кремний, также могут влиять на магнитные свойства стали в разной степени.

Важно отметить, что форма и обработка стали также могут влиять на ее магнитные свойства. Например, магнитная проницаемость может изменяться в зависимости от толщины стали или от наличия напряжений внутри материала. Также большое влияние на магнитную проницаемость оказывает термообработка.

При термообработке происходят изменения в микроструктуре нержавеющей стали, что приводит к изменению ее магнитных свойств. Во время нагрева и охлаждения происходят процессы фазовых превращений, реорганизации зерен и образования навесок. Это может привести как к увеличению, так и к снижению магнитной проницаемости.

В некоторых случаях термообработка может позволить достичь определенного значения магнитной проницаемости, которое требуется для конкретного прибора или устройства. Например, при нагреве нержавеющей стали и последующем охлаждении в определенном режиме можно получить материал с повышенной магнитной проницаемостью, что может быть полезно при создании электромагнитов или других устройств, где требуется высокая чувствительность к магнитному полю.

Однако необходимо учитывать, что при термообработке нержавеющей стали возможны и другие изменения, которые могут негативно сказаться на ее механических и химических свойствах. Поэтому при выборе режима термообработки необходимо внимательно оценивать все возможные влияющие факторы и подбирать оптимальный режим обработки.

Аустенитные нержавеющие стали марок AISI 321, AISI 316LN, AISI 316L, 12X18H10T широко используются при конструировании и изготовлении высоковакуумного оборудования из-за своих хороших механических, технологических и магнитных свойств, а также их хорошей свариваемости.

Стабильность аустенитной структуры стали, как уже было сказано, зависит от химического состава и внешних условий, температуры и деформации. Таким образом, необходимо проводить измерения магнитной проницаемости нержавеющей стали как в исходном состоянии, так и на разных этапах обработки. С влиянием низкотемпературной обработки на магнитные свойства некоторых образцов нержавеющей стали можно ознакомиться в статьях [1; 2].

### 1. Свойства изучаемых образцов

Химический состав исследуемых образцов нержавеющей стали определялся с помощью стилоскопа – прибора, предназначенного для визуального полуколичественного анализа сталей и цветных сплавов по их спектрам излучения. Принцип его действия основан на том, что образец контактирует с электродом стилоскопа, в результате чего образуется искра или дуга. Излучаемый свет проходит через оптическую систему и раскладывается на спектр. В окуляре наблюдаются спектральные линии в области спектра человеческого зрения. На основании методических указаний по выбору диапазона спектра, наличию и интенсивности спектральных линий определяется наличие химического элемента в сплаве и его доли.

В табл. 1 представлено процентное содержание химических элементов в исследуемых образцах нержавеющей стали.

Таблица 1

Химический состав нержавеющей стали

Table 1

Chemical composition of stainless steel

	Fe	C	Si	Mn	Cr	Mo	Ni	Al
316L	67,7	0,03	0,3	1,19	17,7	1,97	10,6	0,003
321	69,8	0,04	0,4	1,13	17,7	0,28	9,4	0,135
316LN	65,4	0,02	0,3	1,12	16,8	2,4	13,3	0,010
12X18H10T	70,8	0,02	0,3	1,03	17,3	0,04	9,8	0,049
	Co	Cu	Nb	Ti	V	W	Pb	
316L	0,19	0,04	0,005	0,0062	0,094	0,05	0,015	
321	0,15	0,39	0,012	0,31	0,107	0,09	0,015	
316LN	0,14	0,46	0,012	0,0078	0,060	0,05	0,015	
12X18H10T	0,02	0,09	0,019	0,309	0,112	0,05	0,015	

## 2. Методика измерений и вычислений

Измерения проводились в калибровочном дипольном магните (КДМ) [3], высота межполюсного зазора которого составляет 60 мм. На катушки КДМ подавался ток от источника питания в диапазоне от 40 до 1000 А, что соответствует магнитному полю от 2 до 27 кГс.

Измерения магнитного поля проводились при помощи датчиков ядерного магнитного резонанса [4]. На каждом диапазоне полей проводилось по 10 измерений, далее бралось среднее значение поля.

Если поместить исследуемый образец нержавеющей стали в магнитное поле, то содержащиеся в нем магнитные диполи переориентируются в направлении магнитного поля, что приведет к изменению индукции магнитного поля, а именно к ее увеличению.

Связь индукции и напряженности магнитного поля выражается следующим образом:

$$B = \mu\mu_0 H, \quad (1)$$

где  $B$  – магнитная индукция (Тл),  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость среды,  $\mu_0$  – магнитная постоянная (Гн/м),  $H$  – напряженность магнитного поля (А/м).

Воспользуемся законом полного тока для магнитного поля:

$$\oint_L H \cdot dl = I_{\text{общ}}, \quad (2)$$

где  $L$  – длина произвольного замкнутого контура (м).

Решая это уравнение для двух ситуаций: когда исследуемый образец находится в зазоре магнита и вне его, мы получим следующее:

$$\begin{cases} \frac{B_0 \cdot \Delta}{\mu_0} + \frac{B_m \cdot l_m}{\mu_0 \cdot \mu_m} = I \cdot w, \\ \frac{B_1 \cdot h}{\mu_1 \cdot \mu_0} + \frac{B_1}{\mu_0} \cdot (\Delta - h) + \frac{B_m \cdot l_m}{\mu_0 \cdot \mu_m} = I \cdot w \end{cases}, \quad (3)$$

где  $B_0$  – магнитная индукция без образца (Тл),  $B_1$  – магнитная индукция с образцом (Тл),  $B_m$  – магнитная индукция железа магнита (Тл),  $\Delta$  – воздушный зазор (м),  $h$  – толщина образца (м),  $l_m$  – длина замкнутого контура железа магнита (м),  $\mu_1$  – магнитная проницаемость образца,  $\mu_0$  – магнитная постоянная (Гн/м),  $\mu_m$  – магнитная проницаемость железа магнита,  $I$  – ток в катушке (А),  $w$  – количество витков катушки. В случае ненасыщенного железа, когда  $B_m \leq 1,5$  Тл, его магнитная проницаемость достигает больших величин, следовательно,  $H_m \cdot l_m \ll H_0 \cdot \Delta$ , что позволяет нам пренебрегать влиянием образца на магнитную индукцию железа магнита [5].

Решая эти уравнения относительно  $\mu_1$ , получаем:

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{h} \left(1 - \frac{B_0}{B_1}\right)}. \quad (4)$$

Относительная магнитная проницаемость может быть пересчитана в магнитную восприимчивость ( $\chi$ ), которая является безразмерной физической величиной и показывает связь между вектором намагниченности вещества ( $\vec{M}$ ) с вектором напряженности внешнего магнитного поля ( $\vec{H}$ ):

$$\chi = \frac{\bar{M}}{H} = \mu_1 - 1. \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) можно получить зависимость изменения величины магнитного поля от магнитной восприимчивости и увидеть, что при малых значениях восприимчивости эта величина пропорциональна  $\chi$ :

$$B_1 - B_0 = \chi \cdot \frac{h \cdot B_1}{\Delta \cdot (1 + \chi)}. \quad (6)$$

### 3. Результаты измерений

На рис. 1 показаны зависимости магнитной проницаемости исследуемых образцов аустенитной стали размерами  $0,15 \times 0,15 \text{ м}^2$  (AISI 316L – толщина образца 0,0075 м, AISI 316LN – 0,0107 м, AISI 321 – 0,01 м, 12X18H10T – 0,0059 м) от индукции магнитного поля.

Как видно на рис. 1, с ростом поля магнитная проницаемость образцов уменьшается ввиду постепенного увеличения магнитного насыщения образцов. В зависимости от марки нержавеющей стали и ее состава это уменьшение будет происходить значительней.

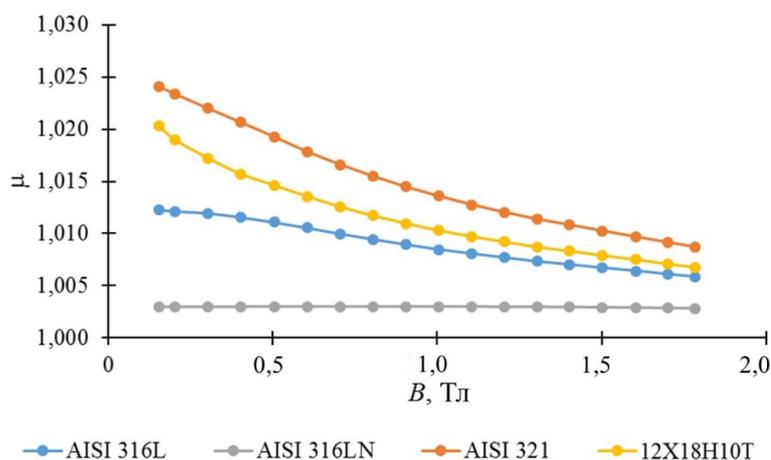


Рис. 1. Магнитная проницаемость исследуемых марок аустенитной стали  
Fig. 1. Magnetic permeability of the studied grades of austenitic steel

На следующем этапе исследования образцы были подвержены термической обработке, в ходе которой нержавеющей стали помещали в печь, нагревали до температуры  $1050 \text{ }^\circ\text{C}$  и выдерживали в ней в течение 2 часов в целях остывания. Данную процедуру делают с целью внесения необходимых изменений в качественные показатели сплава, улучшения его состава и эксплуатационных возможностей. Если нагреть исследуемый образец выше точки Кюри и охладить в отсутствие магнитного поля, то его магнитная восприимчивость будет уменьшаться (рис. 2). Из графиков видно, что, например, магнитная проницаемость при поле 1,5 Тл для образца 321 улучшилась на 0,49 %, для 316LN увеличилась на 0,004 %. Если говорить о магнитной восприимчивости, то для образца 321 она улучшилась в 2 раза, для 316LN – практически не изменилась.

Помимо этого было изучено влияние TIG-сварки (Tungsten Inert Gas – ручная дуговая сварка с использованием неплавящегося электрода под защитой инертных газов, в нашем случае аргона) с использованием проволоки св.06X19H9T и электронно-лучевой сварки на нержаве-

ющую сталь разных марок (рис. 3–6). Сварочный шов был проварен по всей ширине заготовки в области  $0,03 \times 0,13 \text{ м}^2$  с шагом между швами примерно  $0,003\text{--}0,004 \text{ м}$ . На этих же рисунках изображены данные, полученные при вакуумном отжиге при  $T = 1020 \text{ }^\circ\text{C}$  в течение 40 мин и остывании в печке. В табл. 2 показаны величины магнитной восприимчивости, полученные в ходе экспериментов.

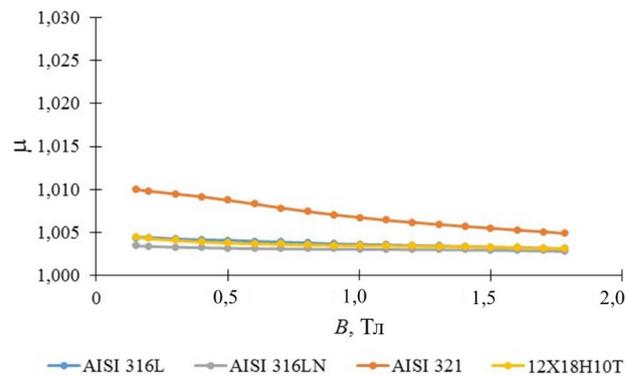


Рис. 2. Магнитная проницаемость исследуемых марок аустенитной стали после отжига в печи при  $T = 1050 \text{ }^\circ\text{C}$

Fig. 2. Magnetic permeability of the studied grades of austenitic steel after annealing in a furnace at  $T = 1050 \text{ }^\circ\text{C}$

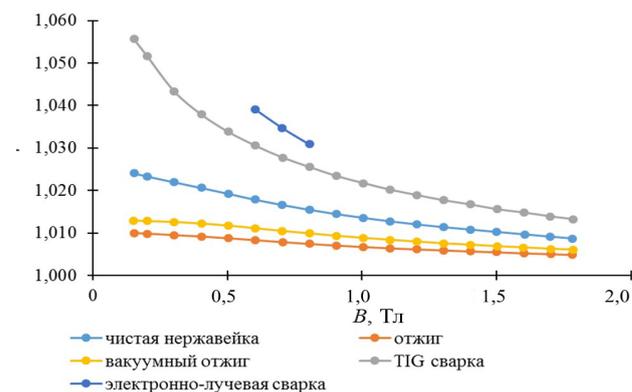


Рис. 3. Зависимость магнитной проницаемости нержавеющей стали марки AISI 321 после разных видов обработки

Fig. 3. Dependence of magnetic permeability of stainless steel grade AISI 321 after different types of processing

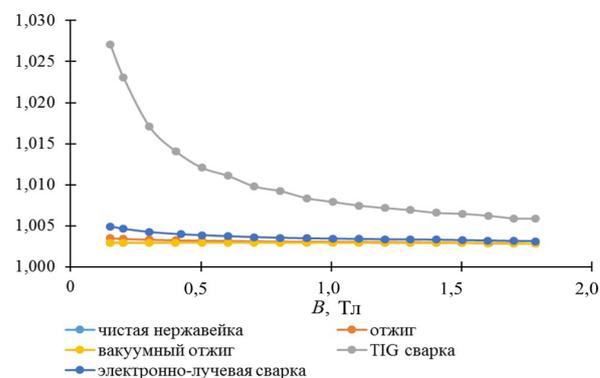


Рис. 4. Зависимость магнитной проницаемости нержавеющей стали марки AISI 316LN после разных видов обработки

Fig. 4. Dependence of magnetic permeability of stainless steel grade AISI 316LN after different types of processing

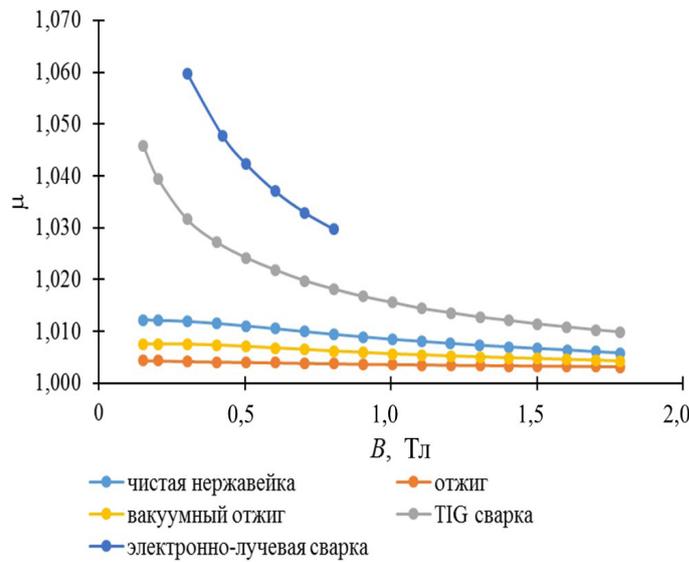


Рис. 5. Зависимость магнитной проницаемости нержавеющей стали марки AISI 316L после разных видов обработки

Fig. 5. Dependence of magnetic permeability of stainless steel grade AISI 316L after different types of processing

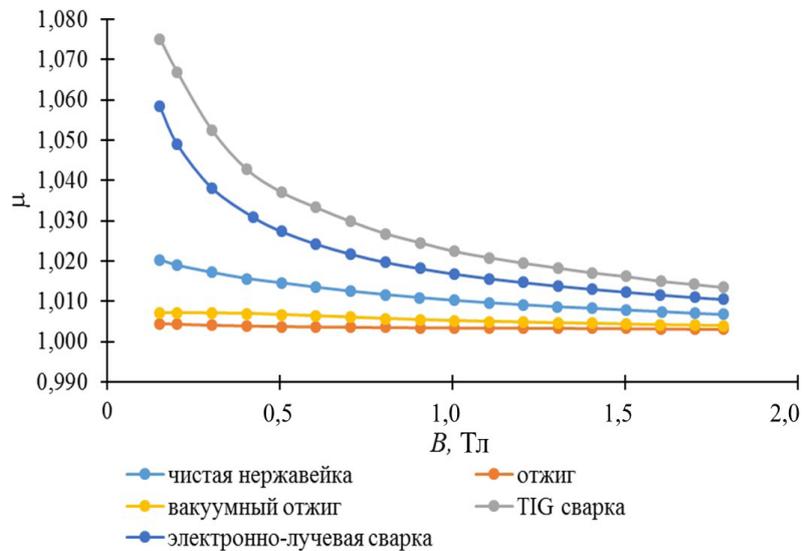


Рис. 6. Зависимость магнитной проницаемости нержавеющей стали марки 12X18N10T после разных видов обработки

Fig. 6. Dependence of magnetic permeability of stainless steel grade 12X18N10T after different types of processing

На рис. 7 в качестве примера показаны фотографии образца из стали типа AISI 316L до обработки и после внешнего воздействия.

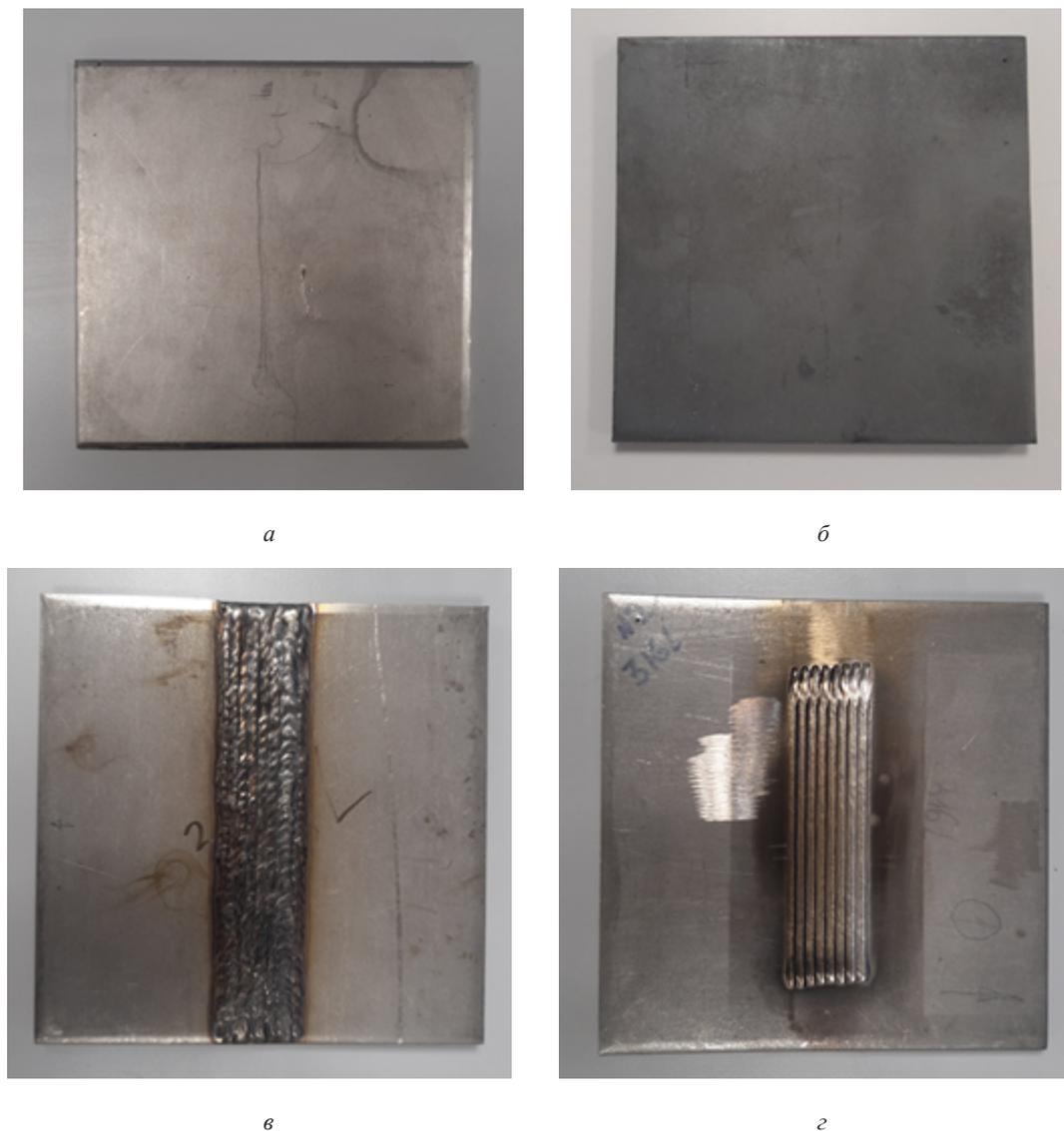


Рис. 7. Внешний вид изучаемого образца из нержавеющей стали типа AISI 316L: *а* – чистый образец; *б* – после отжига в печи; *в* – после TIG сварки; *г* – после электронно-лучевой сварки  
Fig. 7. External appearance of the studied sample made of stainless steel type AISI 316L: *a* – clean sample; *б* – after annealing in a furnace; *в* – after TIG welding; *г* – after electron beam welding

### Заключение

После воздействия на исследуемые образцы немагнитной нержавеющей стали различными технологическими процессами было зафиксировано изменение величины магнитной проницаемости. Для удобства сравнение результатов будет приведено в единицах магнитной восприимчивости. Для стали типа AISI 316L после отжига магнитная восприимчивость уменьшилась в среднем в 2,4 раза, после вакуумного отжига – в 1,5 раза, после использования TIG- и электронно-лучевой сварок величина восприимчивости увеличилась в 2,1 и 3,8 раза соответственно. Для образца из AISI 321 были получены следующие результаты: после отжига  $\chi$  уменьшилась в 2,1 раза, после вакуумного отжига – в 1,6 раза, после TIG- и электронно-лучевой сварок увеличилась в 1,7 и 2,1 раза соответственно. В случае нержавеющей стали AISI 316LN после отжига  $\chi$  увеличилась в 1,05 раза, после вакуумного отжига не изменилась, по-

сле TIG-сварки увеличилась в 3,6 раза, после электронно-лучевой – в 1,2 раза. Что касается последнего образца (12X18H10T) – при отжиге магнитная восприимчивость упала в 3,2 раза, после вакуумного отжига – в 2,1 раза, после TIG-сварки  $\chi$  возросла в 2,4 раза, а после электронно-лучевой – в 1,8 раза.

Таким образом, в рамках данной статьи был выявлен характер изменения величины магнитной проницаемости нержавеющей стали под воздействием термических обработок. Полученную информацию можно применять, например, при выборе и подготовке материала для изготовления вакуумных систем электрофизических установок.

### Список литературы

1. **Collings E. W., Har S. C.** Low temperature magnetic susceptibility and magnetization studies of some commercial austenitic stainless steels // *Cryogenics*. September 1979. P. 521. [https://doi.org/10.1016/0011-2275\(79\)90005-5](https://doi.org/10.1016/0011-2275(79)90005-5)
2. **Larbalestier D. C., King H. W.** Austenitic stainless steels at cryogenic temperatures 1—Structural stability and magnetic properties // *Cryogenics*. March 1973. P. 160. [https://doi.org/10.1016/0011-2275\(73\)90285-3](https://doi.org/10.1016/0011-2275(73)90285-3)
3. **Рябченко К. К., Пахомов А. Ю., Рыбицкая Т. В., Старостенко А. А.** Способы корректировки поля дипольного магнита // *ПТЭ*. 2019. № 6. С. 117. <https://doi.org/10.1134/S0032816219060132>
4. **Карпов Г. В.** ЯМР Магнитометр, Институт ядерной физики им. Будкера. Новосибирск, 2013.
5. **Персов Б. З.** Расчет и проектирование экспериментальных установок, Институт компьютерных исследований. Москва-Ижевск, 2006. С. 277.

### References

1. **Collings E. W., Har S. C.** Low temperature magnetic susceptibility and magnetization studies of some commercial austenitic stainless steels // *Cryogenics*. September 1979. P. 521. [https://doi.org/10.1016/0011-2275\(79\)90005-5](https://doi.org/10.1016/0011-2275(79)90005-5)
2. **Larbalestier D. C., King H. W.** Austenitic stainless steels at cryogenic temperatures 1—Structural stability and magnetic properties // *Cryogenics*. March 1973. P. 160. [https://doi.org/10.1016/0011-2275\(73\)90285-3](https://doi.org/10.1016/0011-2275(73)90285-3)
3. **Riabchenko K. K., Pakhomov A. Yu., Rybitskaya T. V., Starostenko A. A.** Methods of correcting the field of a dipole magnet // *IET*. 2019. № 6. P. 117. <https://doi.org/10.1134/S0032816219060132>
4. **Karpov G. V.** NMR Magnetometer, Budker Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, 2013.
5. **Persov B. Z.** Calculation and design of experimental installations, Institute of Computer Research. Moscow-Izhevsk, 2006. P. 277.

## Приложение

## Таблица

Зависимость магнитной восприимчивости образцов аустенитной стали  
в зависимости от технической обработки

Table

Dependence of magnetic susceptibility of austenitic steel samples on technical treatment

<i>Чистая нержавеющая сталь</i>					<i>Отжиг</i>				
В, Тл	$\chi$				В, Тл	$\chi$			
	AISI 316L	AISI 321	AISI 316LN	12X18H10T		AISI 316L	AISI 321	AISI 316LN	12X18H10T
0,1522	0,012	0,024	0,00296	0,020	0,1522	0,004	0,010	0,00346	0,005
0,2020	0,012	0,023	0,00296	0,019	0,2021	0,004	0,010	0,00340	0,004
0,3023	0,012	0,022	0,00297	0,017	0,3024	0,004	0,009	0,00330	0,004
0,4028	0,012	0,021	0,00298	0,016	0,4029	0,004	0,009	0,00324	0,004
0,5033	0,011	0,019	0,00298	0,015	0,5034	0,004	0,009	0,00319	0,004
0,6038	0,011	0,018	0,00298	0,014	0,6040	0,004	0,008	0,00315	0,004
0,7043	0,010	0,017	0,00299	0,013	0,7046	0,004	0,008	0,00312	0,004
0,8045	0,009	0,015	0,00299	0,012	0,8051	0,004	0,007	0,00310	0,004
0,9046	0,009	0,014	0,00299	0,011	0,9054	0,004	0,007	0,00309	0,004
1,0045	0,008	0,014	0,00298	0,010	1,0054	0,004	0,007	0,00307	0,003
1,1044	0,008	0,013	0,00298	0,010	1,1054	0,004	0,006	0,00306	0,003
1,2040	0,008	0,012	0,00297	0,009	1,2051	0,003	0,006	0,00304	0,003
1,3034	0,007	0,011	0,00296	0,009	1,3045	0,003	0,006	0,00303	0,003
1,4023	0,007	0,011	0,00295	0,008	1,4035	0,003	0,006	0,00300	0,003
1,5004	0,007	0,010	0,00293	0,008	1,5017	0,003	0,005	0,00297	0,003
1,6048	0,006	0,010	0,00290	0,008	1,6020	0,003	0,005	0,00293	0,003
1,7009	0,006	0,009	0,00286	0,007	1,7012	0,003	0,005	0,00289	0,003
1,7835	0,006	0,009	0,00284	0,007	1,7831	0,003	0,005	0,00284	0,003

<i>Вакуумный отжиг</i>					<i>TIG-сварка</i>				
В, Тл	$\chi$				В, Тл	$\chi$			
	AISI 316L	AISI 321	AISI 316LN	12X18H10T		AISI 316L	AISI 321	AISI 316LN	12X18H10T
0,1521	0,008	0,013	0,00291	0,007	0,1522	0,046	0,056	0,02705	0,075
0,2020	0,008	0,013	0,00293	0,007	0,2021	0,039	0,052	0,02306	0,067
0,3023	0,008	0,013	0,00294	0,007	0,3025	0,032	0,043	0,01706	0,052
0,4028	0,007	0,012	0,00295	0,007	0,4029	0,027	0,038	0,01408	0,043
0,5033	0,007	0,012	0,00296	0,007	0,5035	0,024	0,034	0,01207	0,037
0,6039	0,007	0,011	0,00296	0,006	0,6041	0,022	0,031	0,01109	0,033
0,7045	0,007	0,010	0,00296	0,006	0,7046	0,020	0,028	0,00980	0,030
0,8049	0,006	0,010	0,00296	0,006	0,8051	0,018	0,026	0,00924	0,027
0,9052	0,006	0,009	0,00295	0,005	0,9054	0,017	0,023	0,00837	0,025
1,0053	0,006	0,009	0,00295	0,005	1,0055	0,016	0,022	0,00792	0,022
1,1053	0,005	0,008	0,00294	0,005	1,1053	0,014	0,020	0,00747	0,021
1,2050	0,005	0,008	0,00294	0,005	1,2050	0,014	0,019	0,00718	0,019
1,3045	0,005	0,008	0,00293	0,005	1,3045	0,013	0,018	0,00693	0,018
1,4035	0,005	0,007	0,002915	0,005	1,4035	0,012	0,017	0,00659	0,017
1,5018	0,005	0,007	0,00290	0,004	1,5018	0,011	0,016	0,00647	0,016
1,6002	0,005	0,007	0,00288	0,004	1,6021	0,011	0,015	0,00624	0,015
1,7012	0,004	0,006	0,00285	0,004	1,6995	0,010	0,014	0,00591	0,014
1,7836	0,004	0,006	0,00281	0,004	1,7839	0,010	0,013	0,00588	0,014

<i>Электронно-лучевая сварка</i>				
В, Тл	$\chi$			
	AISI 316L	AISI 321	AISI 316LN	12X18H10T
0,1521			0,00490	0,058
0,2020			0,00461	0,049
0,3023	0,060		0,00423	0,038
0,4230	0,048		0,00395	0,031
0,5033	0,042		0,00384	0,027
0,6039	0,037	0,039	0,00372	0,024
0,7045	0,033	0,035	0,00361	0,022
0,8049	0,030	0,031	0,00353	0,020
0,9052			0,00347	0,018
1,0053			0,00343	0,017
1,1053			0,00339	0,016
1,2050			0,00336	0,015
1,3045			0,00333	0,014
1,4035			0,00330	0,013
1,5018			0,00326	0,012
1,6002			0,00321	0,012
1,7013			0,00316	0,011
1,7836			0,00313	0,011

### Сведения об авторах

**Рябченко Ксения Константиновна**, младший научный сотрудник

**Пахомов Алексей Юрьевич**, младший научный сотрудник

**Жиляев Константин Владимирович**, младший научный сотрудник

**Старостенко Александр Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

**Цыганов Александр Сергеевич**, научный сотрудник

### Information about the Authors

**Kseniia K. Riabchenko**, Junior Researcher

**Aleksey Yu. Pakhomov**, Junior Researcher

**Konstantin V. Zhilyaev**, Junior Researcher

**Aleksandr A. Starostenko**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher

**Aleksandr S. Tsyganov**, Researcher

*Статья поступила в редакцию 03.07.2024;  
одобрена после рецензирования 11.11.2024; принята к публикации 24.02.2025*

*The article was submitted 03.07.2024;  
approved after reviewing 11.11.2024; accepted for publication 24.02.2025*

Научная статья

УДК 535.372; 547.792

DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-67-74

**Фотофизическая активность продуктов  
медленного термического разложения  
3-нитро-4,5-дигидро-1,2,4-триазол-5-она (НТО)**

**Александр Васильевич Станкевич<sup>1</sup>, Данил Станиславович Ячевский<sup>2</sup>  
Геннадий Леонидович Русинов<sup>3</sup>**

<sup>1,2,3</sup> Институт органического синтеза им. И. Я. Постовского УрО РАН  
Екатеринбург, Россия

<sup>1</sup> Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической  
физики им. акад. Е. И. Забабахина  
Снежинск, Россия

<sup>1</sup> stankevich@ios.uran.ru, vniitf@vniitf.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8294-3608>

<sup>2</sup> yad@ios.uran.ru

<sup>3</sup> rusinov@ios.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8567-9435>

*Аннотация*

В данной работе приведены результаты исследования фотофизической активности продуктов медленного термического разложения энергетического материала 3-нитро-4,5-дигидро-1,2,4-триазол-5-она (НТО). Показаны спектральные свойства, цветовая палитра и фотолюминесценция продуктов разложения НТО. Установлено, что при увеличении длины волны облучения от 400 до 700 нм увеличивается выход фотонов с меньшей энергией.

*Ключевые слова*

фотофизическая активность, цветовая палитра, фотолюминесценция, 3-нитро-4,5-дигидро-1,2,4-триазол-5-он (НТО), продукты разложения

*Финансирование*

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №24-13-00420, 06.05.2024).

*Для цитирования*

Станкевич А. В., Ячевский Д. С., Русинов Г. Л. Фотофизическая активность продуктов медленного термического разложения 3-нитро-4,5-дигидро-1,2,4-триазол-5-она (НТО) // Сибирский физический журнал. 2025. Т. 20, № 1. С. 67–74. DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-67-74

# Photophysical Activity for Products of Slow Thermal Decomposition of 3-nitro-4,5-dihydro-1,2,4-triazole-5-one (NTO)

Alexandr V. Stankevich<sup>1</sup>, Danil S. Yachevskii<sup>2</sup>,  
Gennady L. Rusinov<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Postovsky Institute of Organic Synthesis, Ural Branch, Russian Academy of Sciences  
Ekaterinburg, Russian Federation

<sup>1</sup> Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russia Research Institute of Technical Physics  
Russian Federation

<sup>1</sup> stankevich@ios.uran.ru, vniitf@vniitf.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8294-3608>

<sup>2</sup> yad@ios.uran.ru

<sup>3</sup> rusinov@ios.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8567-9435>

## Abstract

This paper presents the results of a study of the photophysical activity for products of slow thermal decomposition of energetic material 3-nitro-4,5-dihydro-1,2,4-triazole-5-one (NTO). The spectral properties, color palette, and photoluminescence of NTO decomposition products are shown. It has been found that with an increase in the irradiation wavelength from 400 to 700 nm, the output of photons with lower energy increases.

## Keywords

photophysical activity, color palette, photoluminescence, 3-nitro-4,5-dihydro-1,2,4-triazol-5-one (NTO), decomposition products

## Acknowledgements

This study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (agreement No. 24-13-00420 dated 06.05.2024).

## For citation

Stankevich A.V., Yachevskii D.S., Rusinov G.L. Photophysical activity for products of slow thermal decomposition of 3-nitro-4,5-dihydro-1,2,4-triazole-5-one (NTO). *Siberian Journal of Physics*, 2025, vol. 20, no. 1, p. 67–74. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-67-74

## Постановка задачи, мотивация

В настоящее время наиболее изученными фотокатализаторами являются металлосодержащие матричные композиты на основе углеродных материалов – носителей, содержащих оксиды металлов: TiO<sub>2</sub>, ZnO, MgO [1–3] и металлы платиновой группы: Ni, Pt, Pd [4; 5]. Они используются в органическом синтезе при переработке полезных ископаемых [6; 7], при разложении воды [8; 9], восстановлении диоксида углерода [10] и в качестве компонентов технических устройств. Однако данные структуры имеют высокую стоимость из-за использования редкоземельных и драгоценных металлов платиновой группы, а металлоксидные композиты имеют узкую спектральную область активности в диапазоне от 230 до 450 нм. Кроме описанных материалов, многие органические вещества, полученные из относительно дешевого сырья, также обладают фотоактивностью [11; 12]. Например, фотофизическая активность нитрида углерода [13] – продукта медленного термического разложения (МТР) меламин – позволяет использовать его в качестве основы для фотокатализаторов [14; 15].

Подобным образом продукты разложения органических полиазотсодержащих энергетических материалов (ЭМ) представляют научно-практический интерес в различных областях химической инженерии и медицины [16]. Кроме того, продуктами детонации некоторых ЭМ являются нанодисперсные алмазы и углерод в виде сажи [17; 18], которые могут содержать атомы азота и связи типа C...N, а также способны проявлять фотофизическую активность.

Одним из определяющих факторов фотоактивности вещества является его строение, т. е. элементный состав и тип химических связей между элементами. В свою очередь, строение вещества определяется прекурсорами его синтеза и механизмами химических реакций, которые формируют связи между атомами. Принимая данные факты во внимание, можно попытаться

за счет изменения механизма химических реакций термораспада влиять на фотоактивность продуктов.

В данной работе предпринята попытка получения углеродно-нитридных материалов (УНМ) с высокой фотофизической активностью, увеличивающейся по мере уменьшения частотных характеристик электромагнитного излучения (ЭМИ) источника воздействия. В качестве прекурсора синтеза УНМ выбран 3-нитро-4,5-дигидро-1,2,4-триазол-5-он (НТО), позволяющий за счет изменения условий термического разложения регулировать строение и, соответственно, свойства получаемого фотоактивного материала. При этом НТО является относительно недорогим и доступным продуктом.

### Изготовление и характеристика образцов

НТО был получен по методике [19]. Синтез фотоактивных веществ проводился в азотсодержащей атмосфере при термическом воздействии на НТО до точки окончания экзотермических превращений согласно данным ДСК-анализа [19] (рис. 1). О предположительном строении конденсированных продуктов термического разложения НТО сообщалось в работе [20]. Однако анализа строения продуктов разложения в работе не показано. Отсутствуют данные об элементном составе, спектральных свойствах: энергии колебательных состояний и электронное строение.



Рис. 1. Изготовление фотоактивных веществ из НТО  
Fig. 1. Production of photoactive substances from NTO

Мы полагаем, что механизм разложения может изменяться в зависимости от интенсивности инициирования химических реакций термического разложения, а структура конечных конденсированных продуктов реакции очевидно зависит от конечной температуры. Данный факт требует дальнейших исследований строения полученных веществ.

### Определение фотоактивности

Из-за специфики метода термического разложения (см. рис. 1) сложно добиться ровной поверхности образца, поэтому для измерения фотоактивности выполнялся поиск областей воздействия с минимальным количеством видимых неоднородностей, имеющих внутренние каналы (рис. 2, а).

Измерение фотолюминесценции выполнялось с помощью лазерной накачки и регистрации отраженного от образца сигнала CCD-детектором (Andor). Воздействие производилось через объектив с увеличением 10×. Лазерная накачка выполнялась тремя источниками с длиной волны 473, 532 и 633 нм, для которых диаметр пятна взаимодействия лазерного излучения (ЛИ) составил 45, 30 и 40 мкм соответственно (рис. 2, б). Все исследования проводились на базе модульной платформы нанолaborатории Интегра-Спектра производства компании НТ-

МДТ РФ, общая оптическая схема которой приведена в работе [21], а оптическая схема эксперимента, выполненного в данной работе, показана на рис. 3. Спектры диффузного отражения получены с помощью спектрофотометра.

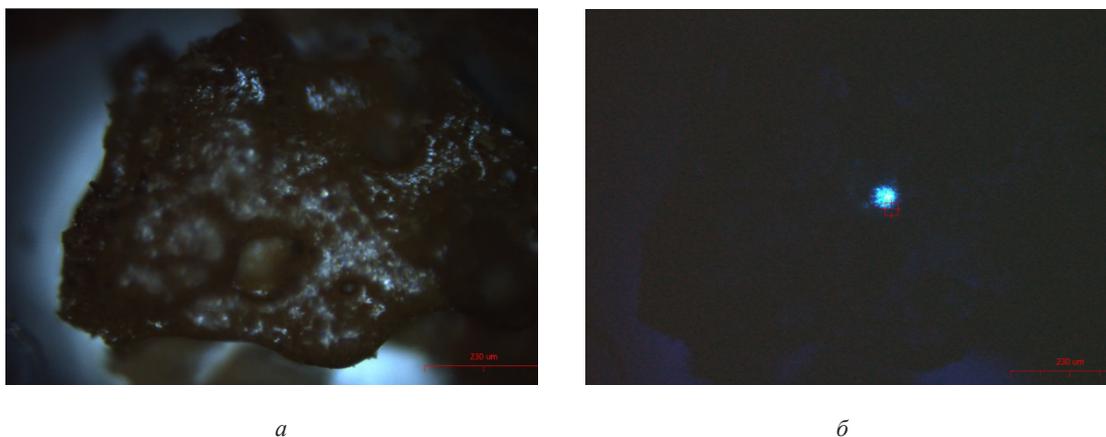


Рис. 2. Микрофотография поверхности продукта МТР НТО (а) и область воздействия ЛИ (б)  
Fig. 2. Microphotography of the surface of the STD NTO product (a) and the area of exposure to LR (b)

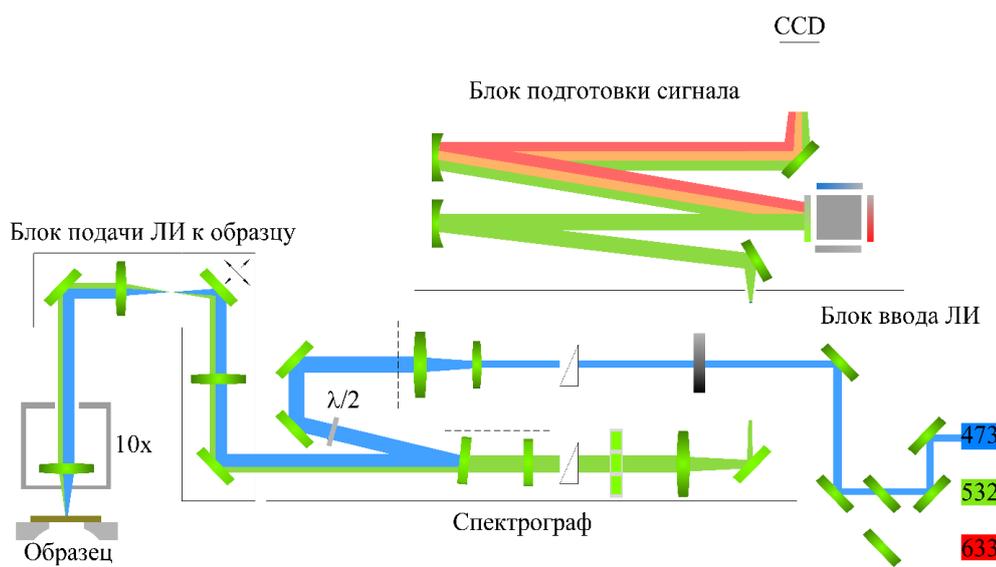


Рис. 3. Оптическая схема эксперимента  
Fig. 3. Optical scheme of the experiment

Известно, что фотоактивность зависит не только от химического строения вещества (элементный состав, химические связи), но и от его субмикроструктуры, в том числе микроморфологии поверхности полученных образцов (см. рис. 2, а), что позволяет регулировать выход фотонов за счет создания развитой поверхности. Стоит отметить, что рабочая поверхность одновременно должна быть плоской и развитой, чтобы выход фотонов не затруднялся сложной микроканальной морфологией. Этим требованиям удовлетворяет поверхность, состоящая из микро- или наносфер [13], уложенных в одной плоскости. Воздействие ЛИ длиной волны 473 нм (см. рис. 2, б), демонстрирует незначительную неравномерность рассеяния ЛИ, следовательно, стоит ожидать минимального снижения интенсивности сигнала фотолюминесценции (рис. 4) относительно плоской поверхности образца. Однако для выхода большего чис-

ла фотонов с общей поверхности целесообразно оптимизировать метод получения образцов, что является целью дальнейших исследований.

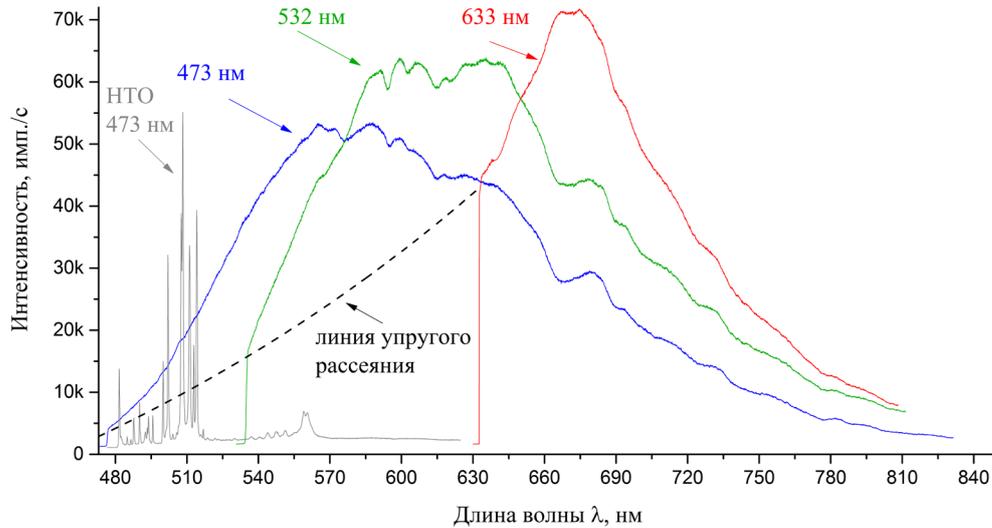


Рис. 4. Спектр фотолуминесценции продуктов МТР НТО в зависимости от длины волны ЛЛ и рамановский спектр НТО при одинаковой дозе облучения (8 мкДж)

Fig. 4. The photoluminescence spectrum of STD NTO products depending on the wavelength and Raman spectrum NTO of the radiation at the same dose (8  $\mu$ J)

Спектры диффузного отражения (рис. 5), упругая составляющая рассеяния фотонов (см. рис. 4), демонстрируют увеличение коэффициента отражения ЭМИ от продуктов МТР НТО в диапазоне от 380 до 1100 нм и, соответственно, уменьшение поглощения (адсорбции) фотонов с энергиями от 3,20 до 1,13 эВ. В отличие от НТО, имеющего ширину запрещенной зоны  $2,9 \pm 0,3$  эВ по экспериментальным данным собственного поглощения, продукты его разложения характеризуются полизональным строением и поэтому более широкой зоной фотофизической активности. Таким образом, можно отметить сужение области неупругого рассеяния и увеличение интенсивности упругого рассеяния по мере уменьшения энергии падающих фотонов, что позволяет получать более монохроматичный поток в длинноволновой области спектра.

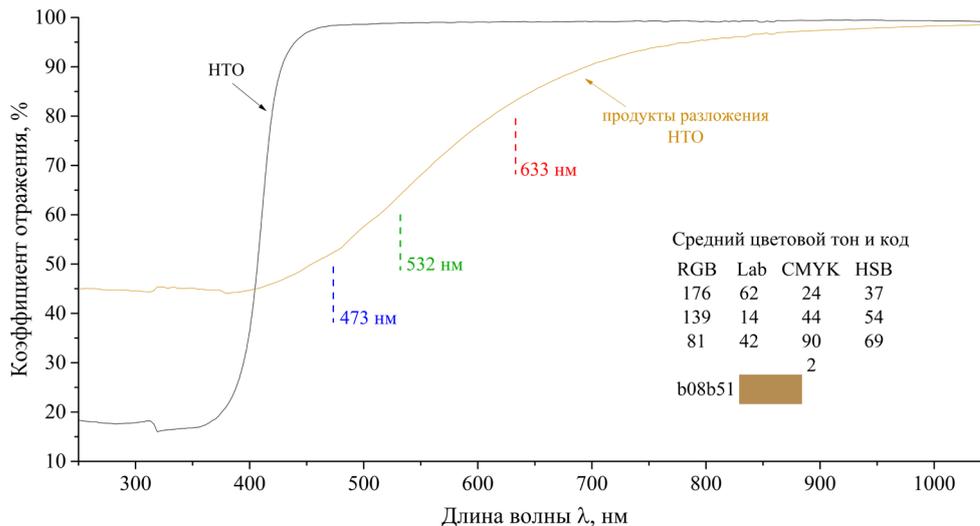


Рис. 5. Спектр диффузного отражения в области 250–1050 нм для продуктов МТР НТО

Fig. 5. Diffuse reflection spectrum in the range of 250–1050 nm for STD NTO products

Мы полагаем, что наблюдаемое красное смещение свидетельствует о перераспределении электронных пар в зависимости от энергетического спектра и природы взаимодействия электронных облаков при  $Sp-Sp^2$  гибридизации в гетероциклических соединениях. Учитывая, что гетероциклические формы нитрида углерода  $g-C_3N_4$  проявляют аналогичный эффект [13], можно предположить, что он может оказаться полезным при создании комбинированных структур для фототехнических и фотохимических процессов, работающих в более широком диапазоне длин волн. Стоит отметить, что УНМ на основе оксидов металлов проявляют снижение фотоактивности по мере снижения энергии фотонов источника воздействия.

### Выводы

Полученные спектры фотолюминесценции позволяют утверждать, что продукты разложения НТО являются фотоактивными, при этом сам НТО не проявляет фотоактивности во всем видимом диапазоне частот ЭМИ. Профиль полученных спектров фотолюминесценции позволяет использовать их в качестве реперных точек для создания комбинированных fotocувствительных элементов.

Учитывая данные фотолюминесценции и микроморфологии поверхности частиц продуктов разложения НТО, можно утверждать, что полученные квантовые выходы фотонов не являются предельными для рассматриваемых материалов.

Таким образом, энергетические материалы выступают прекурсорами синтеза ряда структур, построенных на основе  $C...N$  и  $N...N$  связей различного типа, и обладающих фотоактивностью.

### Список литературы

1. **Lee K. M. et al.** Recent developments of zinc oxide based photocatalyst in water treatment technology: a review // *Water research*. 2016. No. 88. Pp. 428–448.
2. **Park H. et al.** Surface modification of  $TiO_2$  photocatalyst for environmental applications // *Journal of Photochemistry and Photobiology C: Photochemistry Reviews*. 2013. No. 15. Pp. 1–20.
3. **Di Paola A., Bellardita M., Palmisano L.** Brookite, the least known  $TiO_2$  photocatalyst // *Catalysts*. 2013. No. 3(1). Pp. 36–73. doi.org/10.3390/catal3010036
4. **Caux M. et al.** Impact of the annealing temperature on  $Pt/g-C_3N_4$  structure, activity and selectivity between photodegradation and water splitting // *Catalysis Today*. 2017. No. 287. Pp. 182–188. doi.org/10.1016/j.cattod.2016.11.007
5. **Chen X. et al.** Highly selective hydrogenation of furfural to furfuryl alcohol over Pt nanoparticles supported on  $g-C_3N_4$  nanosheets catalysts in water // *Scientific reports*. 2016. No. 6(1). P. 28558. doi.org/10.1038/srep28558
6. **Bradford M. C. J., Vannice M. A.**  $CO_2$  reforming of  $CH_4$  // *Catal. Rev. Sci. Eng.* 1999. No. 41(1). Pp. 1–42. doi.org/10.1081/CR-100101948
7. **Артюнов В. С., Крылова О. В.** Окислительные превращения метана. М.: Наука. 1998. 361 с.
8. **Maeda K. et al.** Photocatalyst releasing hydrogen from water // *Nature*. 2006. No. 440(7082). Pp. 295–295. doi.org/10.1038/440295a
9. **Kudo A.** Photocatalyst materials for water splitting // *Catalysis Surveys from Asia*. 2003. No. 7. Pp. 31–38. doi.org/10.1023/A:1023480507710
10. **Rajalakshmi K. et al.** Photocatalytic reduction of carbon dioxide by water on titania: Role of photophysical and structural properties // *Indian J. Chem.*, No. 51A(03). 2012. Pp. 411–419. <http://nopr.niscpr.res.in/handle/123456789/13652>
11. **Irgashev R. A. et al.** Synthesis, photophysical and electrochemical properties of novel 6, 12-di(thiophen-2-yl) substituted indolo [3, 2-b] carbazoles // *Tetrahedron*. 2014. No. 70(31). Pp. 4685–4696. doi.org/10.1016/j.tet.2014.04.093

12. **Tebello Nyokong, Edith Antunes.** Photochemical and Photophysical Properties of Metallophthalocyanines. Handbook of Porphyrin Science. Pp. 247–357. doi.org/10.1142/9789814307246\_0006
13. **Zinin P. V. et al.** Anomalous fluorescence of the spherical carbon nitride nanostructures // Chemical Physics Letters. 2015. No. 633. Pp. 95–98. doi.org/10.1016/j.cplett.2015.05.020
14. **Thomas A. et al.** Graphitic carbon nitride materials: variation of structure and morphology and their use as metal-free catalysts // Journal of Materials Chemistry. 2008. No. 18(41). Pp. 4893–4908. doi.org/10.1039/B800274F
15. **Hui J. et al.** Graphitic-C<sub>3</sub>N<sub>4</sub> coated floating glass beads for photocatalytic destruction of synthetic and natural organic compounds in water under UV light // Journal of Photochemistry and Photobiology A: Chemistry. 2021. No. 405. P. 112935. doi.org/10.1016/j.jphotochem.2020.112935
16. **Stankevich A. V., Tolshchina S. G., Korotina A. V. et al.** Mechanism, Kinetics and Thermodynamics of Decomposition for High Energy Derivatives of [1, 2, 4] Triazolo [4, 3-b] [1, 2, 4, 5] tetrazine // Molecules. 2022. No. 27(20). P. 6966. 10.3390/molecules27206966
17. **Петров Е. А.** Кинетические аспекты детонационного получения наноалмазов // Южно-сибирский научный вестник. 2022. № 4. С. 99–105.
18. **Kashkarov A. O., Pruel E. R., Ten K. A. et al.** Detonation synthesis of non-agglomerated metallic nanoparticles deposited on carbon supports. // JPCS. 2019. No. 1147(1). P. 012037. 10.1088/1742-6596/1147/1/012037
19. **Lee K. Y., Chapman L. B., Cobura M. D.** 3-Nitro-1,2,4-triazol-5-one, a less sensitive explosive // Journal of Energetic Materials. 1987. No. 5(1). Pp. 27–33. doi.org/10.1080/07370658708012347
20. **Singh G. et al.** Studies on energetic compounds: Part 16. Chemistry and decomposition mechanisms of 5-nitro-2, 4-dihydro-3H-1, 2, 4-triazole-3-one (NTO) // Journal of Hazardous Materials. 2001. No. 81(1–2). Pp. 67–82.
21. Зондовая нанолaborатория ИНТЕГРА Спектра (конфигурация upright) // Руководство по эксплуатации. ЗАО «Нанотехнология-МДТ». М., Зеленоград. 2011. С. 28. (114 с.)

### References

1. **Lee K. M. et al.** Recent developments of zinc oxide based photocatalyst in water treatment technology: a review. *Water research*, 2016, vol. 88, pp. 428–448.
2. **Park H. et al.** Surface modification of TiO<sub>2</sub> photocatalyst for environmental applications. *Journal of Photochemistry and Photobiology C: Photochemistry Reviews*, 2013, vol. 15, pp. 1–20.
3. **Di Paola A., Bellardita M., Palmisano L.** Brookite, the least known TiO<sub>2</sub> photocatalyst. *Catalysts*, 2013, vol. 3(1), pp. 36–73. doi.org/10.3390/catal3010036
4. **Caux M. et al.** Impact of the annealing temperature on Pt/g-C<sub>3</sub>N<sub>4</sub> structure, activity and selectivity between photodegradation and water splitting. *Catalysis Today*, 2017, vol. 287, pp. 182–188. doi.org/10.1016/j.cattod.2016.11.007
5. **Chen X. et al.** Highly selective hydrogenation of furfural to furfuryl alcohol over Pt nanoparticles supported on g-C<sub>3</sub>N<sub>4</sub> nanosheets catalysts in water. *Scientific reports*, 2016, vol. 6(1), p. 28558. doi.org/10.1038/srep28558
6. **Bradford M. C. J., Vannice M. A.** CO<sub>2</sub> reforming of CH<sub>4</sub>. *Catal. Rev. Sci. Eng.*, 1999, vol. 41(1), pp. 1–42. doi.org/10.1081/CR-100101948
7. **Artyunov V. S., Krylova O. V.** Oxidative transformations of methane. *Nauka*, 1998, 361 p.
8. **Maeda K. et al.** Photocatalyst releasing hydrogen from water. *Nature*, 2006, vol. 440(7082), pp. 295–295. doi.org/10.1038/440295a
9. **Kudo A.** Photocatalyst materials for water splitting. *Catalysis Surveys from Asia*, 2003, vol. 7, pp. 31–38. doi.org/10.1023/A:1023480507710
10. **Rajalakshmi K. et al.** Photocatalytic reduction of carbon dioxide by water on titania: Role of photophysical and structural properties. *Indian J. Chem.*, vol. 51A(03), 2012, pp. 411–419. http://nopr.niscares.in/handle/123456789/13652

11. **Irgashev R. A. et al.** Synthesis, photophysical and electrochemical properties of novel 6, 12-di (thiophen-2-yl) substituted indolo [3, 2-b] carbazoles. *Tetrahedron*, 2014, vol. 70(31), pp. 4685–4696. doi.org/10.1016/j.tet.2014.04.093
12. **Tebello Nyokong, Edith Antunes.** Photochemical and Photophysical Properties of Metallophthalocyanines. *Handbook of Porphyrin Science*, pp. 247–357. doi.org/10.1142/9789814307246\_0006
13. **Zinin P. V. et al.** Anomalous fluorescence of the spherical carbon nitride nanostructures. *Chemical Physics Letters*, 2015, vol. 633, pp. 95–98. doi.org/10.1016/j.cplett.2015.05.020
14. **Thomas A. et al.** Graphitic carbon nitride materials: variation of structure and morphology and their use as metal-free catalysts. *Journal of Materials Chemistry*, 2008, vol. 18(41), pp. 4893–4908. doi.org/10.1039/B800274F
15. **Hui J. et al.** Graphitic-C<sub>3</sub>N<sub>4</sub> coated floating glass beads for photocatalytic destruction of synthetic and natural organic compounds in water under UV light. *Journal of Photochemistry and Photobiology A: Chemistry*, 2021, vol. 405, P. 112935. doi.org/10.1016/j.jphotochem.2020.112935
16. **Stankevich A. V., Tolshchina S. G., Korotina A. V. et al.** Mechanism, Kinetics and Thermodynamics of Decomposition for High Energy Derivatives of [1, 2, 4] Triazolo [4, 3-b] [1, 2, 4, 5] tetrazine. *Molecules*, 2022, vol. 27(20), P. 6966. 10.3390/molecules27206966
17. **Petrov E. A.** Kinetic aspects of the detonation production of nanodiamonds. *South Siberian Scientific Bulletin*, 2022, vol. 4, pp. 99–105. (in Russ.)
18. **Kashkarov A. O., Pruel E. R., Ten K. A. et al.** Detonation synthesis of non-agglomerated metallic nanoparticles deposited on carbon supports. *JPCS*, 2019, vol. 1147(1), P. 012037. 10.1088/1742-6596/1147/1/012037
19. **Lee K. Y., Chapman L. B., Cobura M. D.** 3-Nitro-1,2,4-triazol-5-one, a less sensitive explosive. *Journal of Energetic Materials*, 1987, vol. 5(1), P. 27–33. doi.org/10.1080/07370658708012347
20. **Singh G. et al.** Studies on energetic compounds: Part 16. Chemistry and decomposition mechanisms of 5-nitro-2, 4-dihydro-3H-1, 2, 4-triazole-3-one (NTO). *Journal of Hazardous Materials*, 2001, vol. 81(1–2), pp. 67–82.
21. NTEGRA Spectra Probe Nanolab (upright configuration). *User Manual (NT-MDT)*, 2011, P. 28.

### Сведения об авторах

**Станкевич Александр Васильевич**, кандидат технических наук, научный сотрудник

**Ячевский Данил Станиславович**, младший научный сотрудник

**Русинов Геннадий Леонидович**, кандидат химических наук, ведущий научный сотрудник

### Information about the Authors

**Alexandr V. Stankevich**, Candidate of Science (Engineering)

**Danil S. Yachevskii**, Researcher

**Gennady L. Rusinov**, Candidate of Science (Chemistry)

*Статья поступила в редакцию 25.11.2024;  
одобрена после рецензирования 05.12.2024; принята к публикации 05.03.2025  
The article was submitted 25.11.2024; approved after reviewing 05.12.2024;  
accepted for publication 05.03.2025*

Научная статья

УДК 372.853,536.11

DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-75-93

**Численное решение уравнений, содержащих неизвестную  
под знаком интеграла.  
Применение к решению физических задач**

**Петр Васильевич Пипич**

Высший колледж информатики Новосибирского государственного университета  
Новосибирск, Россия

pipich.petr@mail.ru

*Аннотация*

Рассматривается решение уравнений, содержащих неизвестную под знаком интеграла с помощью систем компьютерной математики. Предложено рациональное решение уравнения в задаче определения примесей с помощью лазерного зондирования атмосферы. Показано, как численно определять энергетический спектр квантовых систем в квазиклассическом приближении с использованием условия квантования Бора – Зоммерфельда. Приведены решения уравнений, содержащих функции Бесселя в интегральном представлении в задачах: о дифракции света на непрозрачном диске, о диффузии магнитного поля в полом цилиндре, об определении критического размера ядерного реактора. Найден спектр ридберговских состояний атома водорода в электрическом поле. Предложен способ определения термодинамических свойств релятивистского ферми-газа.

*Ключевые слова*

системы компьютерной математики, уравнения, содержащие неизвестную под знаком интеграла, определение потенциала рассеивающего поля, лазерное зондирование атмосферы, квазиклассическое приближение, диффузия магнитного поля, критический размер ядерного реактора, релятивистский ферми-газ

*Для цитирования*

Пипич П. В. Численное решение уравнений, содержащих неизвестную под знаком интеграла. Применение к решению физических задач // Сибирский физический журнал. 2025. Т. 20, № 1. С. 75–93. DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-75-93

**Numerical Solution of Equations Containing an Unknown  
under the Integral Sign.  
Application to the Solution of Physical Problems**

**Petr V. Pipich**

Higher College of Informatics of Novosibirsk State University  
Novosibirsk, Russian Federation

pipich.petr@mail.ru

*Abstract*

The solution of equations containing an unknown under the integral sign with the help of computer mathematics systems is considered. A rational solution of the equation in the problem of determining impurities by means of laser sensing of the atmosphere is proposed. It is shown how to numerically determine the energy spectrum of quantum systems in the

© Пипич П. В., 2025

quasi-classical approximation using the Bohr-Sommerfeld quantization condition. Solutions of equations containing Bessel functions in integral representation in the following problems are given: about diffraction of light on opaque disk, about diffusion of magnetic field in hollow cylinder, about determination of critical size of nuclear reactor. The spectrum of Rydberg states of hydrogen atom in electric field is found. A method for determining the thermodynamic properties of relativistic fermi-gas is proposed.

#### Keywords

computer mathematics systems, equations containing unknown under the sign of integral, determination of scattering field potential, laser sensing of atmosphere, quasi-classical approximation, diffusion of magnetic field, critical size of nuclear reactor, relativistic fermi-gas

#### For citation

Pipich P. V. Numerical solution of equations containing an unknown under the integral sign. Application to the solution of physical problems. *Siberian Journal of Physics*, 2025, vol. 20, no. 1, p. 75–93. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2025-20-1-75-93

## Введение

В физике встречается немало случаев, когда необходимо решить уравнение, содержащее неизвестную под знаком интеграла, что может представить самостоятельную проблему.

В системах компьютерной математики есть эффективные функции для численного решения уравнений, которые можно использовать для решения обозначенной задачи. Для определенности в дальнейшем будет применяться система компьютерной математики MathCAD, которая обладает низким порогом вхождения и понятным интерфейсом. В MathCAD математические операции дифференцирование, интегрирование и т. д. записываются в естественном виде, к которому пользователь привык при изучении математики. Кроме того, поскольку MathCAD является самым «младшим» среди Maple, Mathematica, MATLAB, то всё, что делает MathCAD, «умеют», в основном, и его более мощные конкуренты. Поэтому полученные результаты можно воспроизвести на более продвинутых платформах.

Основным оператором, который будет использоваться в дальнейшем, является оператор для численного решения уравнений *root*. Он работает по следующей схеме: предположим, необходимо решить уравнение  $f(x) = 0$  (справа от знака « $\Leftarrow$ » ноль, слева – всё остальное). Записываем под знаком оператора *root* левую часть уравнения, т. е.  $f(x)$ , через запятую указываем букву, обозначающую неизвестную, в нашем случае это  $x$ , затем через запятую, левую границу интервала, на котором находится корень, а затем через запятую правую границу. Скобка закрывается, и после знака  $=$  появляется значение корня. Таким образом, процедура решения уравнения будет сводиться к написанию:

$$\text{root}(f(x), x, a, b) =, \quad \text{или} \quad X := \text{root}(f(x), x, a, b) \quad X =$$

При решении системы уравнений используется блок **Given – Find**. Предположим, необходимо решить систему уравнений:  $f(a, b) = 0$ ,  $g(a, b) = 0$  относительно неизвестных  $a, b$ . Процедура решения сводится к следующему. Сначала записываются с помощью оператора присваивания  $:=$  предполагаемые решения, например  $a := 3.2$   $b := 5.4$ . Затем пишется **Given**, после записываются уравнения в естественном виде  $f(a, b) = 0$ ,  $g(a, b) = 0$ , но с использованием специального жирного знака  $=$ , а после пишется **Find(a, b) =** с нормальным знаком  $=$ . На рис. 1 представлены примеры решения уравнений, содержащих неизвестные под знаком интеграла.

**Решить уравнение относительно неизвестной b**

$$\int_0^3 e^{b \cdot x} \cdot \sqrt{2 + \cos(x)} \, dx = 10$$

Решение с помощью функции **root**

$$\text{root}\left(\int_0^3 e^{b \cdot x} \cdot \sqrt{2 + \cos(x)} \, dx - 10, b, 0, 1\right) = 0.55548 \quad \text{Проверка} \quad \int_0^3 e^{0.55548 \cdot x} \cdot \sqrt{2 + \cos(x)} \, dx = 9.99996$$

**Решить систему уравнений относительно a, b**

$$\int_0^\pi e^{-a \cdot x} \cdot \sin(2\sqrt{x}) \, dx + \int_0^2 \frac{\sin(\sqrt{x})}{b + x} \, dx = 3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - a^2 \cdot \sin(y)^2} \, dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - b^2 \cdot \sin(y)^2}} \, dy = -0.5$$

Решение с помощью блока **Given - Find****a := -0.6**   **b := 0.9** - предполагаемое решение

$$\text{Given} \quad \int_0^\pi e^{-a \cdot x} \cdot \sin(2\sqrt{x}) \, dx + \int_0^2 \frac{\sin(\sqrt{x})}{b + x} \, dx = 3 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - a^2 \cdot \sin(y)^2} \, dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - b^2 \cdot \sin(y)^2}} \, dy = -0.5$$

$$\text{Find}(a, b) = \begin{pmatrix} -0.54687 \\ 0.77232 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$\int_0^\pi e^{-(-0.54687) \cdot x} \cdot \sin(2\sqrt{x}) \, dx + \int_0^2 \frac{\sin(\sqrt{x})}{0.77232 + x} \, dx = 3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (-0.54687)^2 \cdot \sin(y)^2} \, dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - 0.77232^2 \cdot \sin(y)^2}} \, dy = -0.5$$

Рис. 1. Примеры решений уравнений с помощью функции **root** и блока **Given – Find**Fig. 1. Examples of equation solutions using the **root** function and **Given – Find** block**Восстановление потенциальной энергии  $U(r)$  по зависимости угла рассеяния  $\chi$  от прицельного расстояния  $\rho$** 

В ряде случаев, исследуя рассеяние частиц, можно установить вид потенциальной энергии  $U(r)$  налетающей частицы в поле рассеивающего центра. Это становится возможным, если известна зависимость угла отклонения  $\chi$  от прицельного расстояния  $\rho$ , т. е. известна формула для  $\chi(\rho)$ .

Построить графики зависимости потенциальной энергии  $U1(r)$  и  $U2(r)$  от расстояния по известной зависимости угла отклонения частицы от прицельного расстояния  $\chi1(\rho)$  и  $\chi2(\rho)$ .

$E := 30$  -энергия налетающей частицы

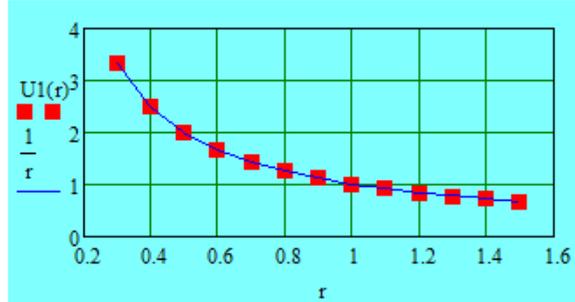
$r := 0.3, 0.4.. 1.5$  -совокупность расстояний между частицей и рассеивающим центром

$$\chi1(\rho) := 2 \cdot \text{atan}\left(\frac{1}{2 \cdot \rho \cdot E}\right) \quad w1(r) := \text{root}\left[\pi \cdot \ln(w) + \int_{r \cdot w}^{100} \frac{\chi1(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - (r \cdot w)^2}} d\rho, w, 0.03, 4.5\right] \quad U1(r) := E \cdot (1 - w1(r)^2)$$

$U1(r)$  - потенциальная энергия рассеивающего центра выраженная через вспомогательную функцию  $w1(r)$ , являющуюся решением соответствующего интегрального уравнения.

$U1(r) =$

3.327
2.494
1.993
1.661
1.422
1.244
1.105
0.994



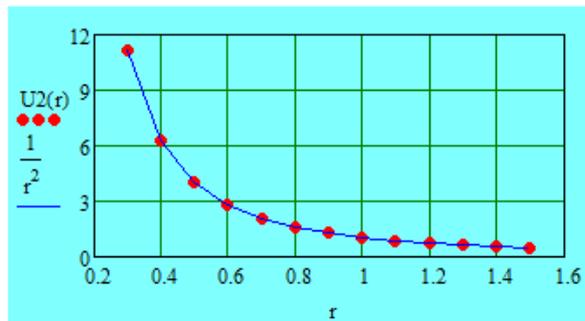
Значения потенциальной энергии  $U1(r)$  вычисленные по решению интегрального уравнения и модельная потенциальная энергия  $r^{-1}$

$$\chi2(\rho) := \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{E \cdot \rho^2}}}\right) \quad w2(r) := \text{root}\left[\pi \cdot \ln(w) + \int_{r \cdot w}^{100} \frac{\chi2(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - (r \cdot w)^2}} d\rho, w, 0.03, 4.5\right] \quad U2(r) := E \cdot (1 - w2(r)^2)$$

$U2(r)$ -потенциальная энергия рассеивающего центра выраженная через вспомогательную функцию  $w2(r)$ , являющуюся решением соответствующего интегрального уравнения

$U2(r) =$

11.111
6.25
4
2.778
2.041
1.563
1.235
1
0.826



Значения потенциальной энергии  $U2(r)$  вычисленные по решению интегрального уравнения и модельная потенциальная энергия  $r^{-2}$

Рис. 2. Верификация численного решения задачи об определении потенциальной энергии  
Fig. 2. Verification of the numerical solution of the problem of potential energy determination

Формальное решение этой задачи приведено в [1] и сводится к решению интегрального уравнения для вспомогательной функции  $w(r)$ , с помощью которой находится  $U(r)$ . Решение интегрального уравнения в неявном виде определяет  $w(r)$ , а следовательно, и  $U(r)$ :

$$w = \exp\left(-\frac{1}{\pi} \cdot \int_{r \cdot w}^{\infty} \frac{\chi(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2 \cdot w^2}}\right), \quad \text{или} \quad \pi \cdot \ln(w) + \int_{r \cdot w}^{\infty} \frac{\chi(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2 \cdot w^2}} = 0, \quad w = \sqrt{1 - \frac{U}{E}}$$

Уравнение для  $w(r)$  будет предметом тестирования излагаемого метода решений уравнений. Рассмотрим два случая, если зависимость поля от  $r$  имеет вид  $1/r$  и  $1/r^2$ :

$$\chi_1(\rho) = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{2 \cdot \rho \cdot E}\right), \quad \chi_2(\rho) = \pi \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{\rho^2 \cdot E}}} \right], \quad \alpha = 1,$$

где энергия частицы  $E=30$  Дж. Результаты численного решения будем обозначать как  $U1(r)$  и  $U2(r)$ . Построим графики зависимости  $U1(r)$  и  $1/r$ ,  $U2(r)$  и  $1/r^2$  для  $0,3 < r < 1,5$  м и сравним численный расчет с аналитической зависимостью. Результаты представлены на рис. 2.

### Лазерное зондирование атмосферы

Для изучения химического и аэрозольного состава атмосферы применяется метод сравнительного поглощения, основанный на использовании лазерных локаторов – лидаров [2].

Атмосфера зондируется импульсами на близких частотах  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Частота  $\nu_1$  почти совпадает с центром линии поглощения  $\nu_a$  исследуемого вещества, а  $\nu_2$  лежит вне ее. Отношение величины принимаемых сигналов на частотах  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  будет определяться поглощением лазерного излучения в спектральной линии исследуемого вещества на частоте  $\nu_1$  и дается выражением:

$$T = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\int_0^\infty K_\lambda^1(\nu) \exp\{-\mu_a K_a(\nu) m\} d\nu}{\int_0^\infty K_\lambda^2(\nu) d\nu},$$

где  $\mu_a$  – процентное содержание рассматриваемой компоненты вещества,  $m$  – масса поглощающего вещества на пути лазерного импульса.

Реальный контур линии поглощения близок к лоренцевскому:

$$K_a(\nu) = \frac{J_0}{\pi} \frac{\gamma_a}{\gamma_a^2 + (\nu - \nu_a)^2},$$

где  $J_0$  – интенсивность линии;  $\gamma_a$  – полуширина.

Частотная зависимость линии лазерного излучения описывается подобным контуром:

$$K_\lambda^i(\nu) = \frac{P_0}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\nu - \nu_i)^2},$$

где  $P_0$  – мощность излученного импульса,  $i = 1, 2$ .

После некоторых преобразований формула для  $T$  будет иметь вид:

$$T = T(z, a, \delta) = \frac{ae^{-z}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(-z \cos(t)) dt}{1 + a^2(1 + \delta^2) + [1 - a^2(1 - \delta^2)] \cos(t) + 2a^2 \delta \sin(t)},$$

где

$$z = \frac{J_0 m \mu_a}{2\pi \gamma_a}, \quad a = \frac{\gamma_a}{\gamma}, \quad \delta = \frac{\nu_a - \nu_1}{\gamma}.$$

Если из экспериментальных данных известно  $T = P_1/P_2$ , то, решая уравнение  $T = T(z, a, b)$ , содержащее неизвестную  $z$  под знаком интеграла, можно определить через  $z$  концентрацию  $\mu_a$  примеси.

В качестве примера решения уравнения, содержащего неизвестную под знаком интеграла, вычислим значения  $z$  при заданных значениях  $T$ . Результаты решения приведены на рис. 3.

Найти корни уравнений  $Tz(1,0,z)=T$ ,  $Tz(1,1,z)=T$ , в неявном виде определяющих зависимость величины  $z$ , пропорциональной концентрации поглощающей примеси, от  $T=P_1/P_2$  - отношения величин принимаемых сигналов на частоте, близкой к центру линии поглощения и на частоте, лежащей за пределами линии поглощения.  $T$  пробегает значения от 0.25 до 0.95

$$Tz(a, \delta, z) := \frac{a \cdot e^{-z}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-z \cdot \cos(t)}}{1 + a^2 \cdot (1 + \delta^2) + [1 - a^2 \cdot (1 - \delta^2)] \cdot \cos(t) + 2a^2 \cdot \delta \cdot \sin(t)} dt$$

Формула в неявном виде определяет зависимость  $z$  - величины пропорциональной концентрации примеси от  $T$  - соотношения сигналов  $P_1/P_2$

$$z1(T) := \text{root}(Tz(1,0,z) - T, z, 0.05, 5)$$

- корни уравнения при совпадении частоты зондирующего сигнала с центром линии поглощения примеси.

$$z2(T) := \text{root}(Tz(1,1,z) - T, z, 0.05, 5)$$

- корни уравнения, когда частота зондирующего сигнала отстоит от центра линии поглощения на полуширину линии поглощения

$$T := 0.25, 0.3 \dots 0.95$$

- соотношения сигналов  $P_1/P_2$  в центре линии поглощения и за ее пределами.

$z1(T) =$

2.855
2.095
1.625
1.302
1.063
0.877
0.725
0.598
0.49
0.395
0.312
0.237
0.17
0.108
0.052

$z2(T) =$

3.727
2.782
2.165
1.729
1.403
1.15
0.945
0.775
0.631
0.506
0.397
0.301
0.214
0.136
0.065

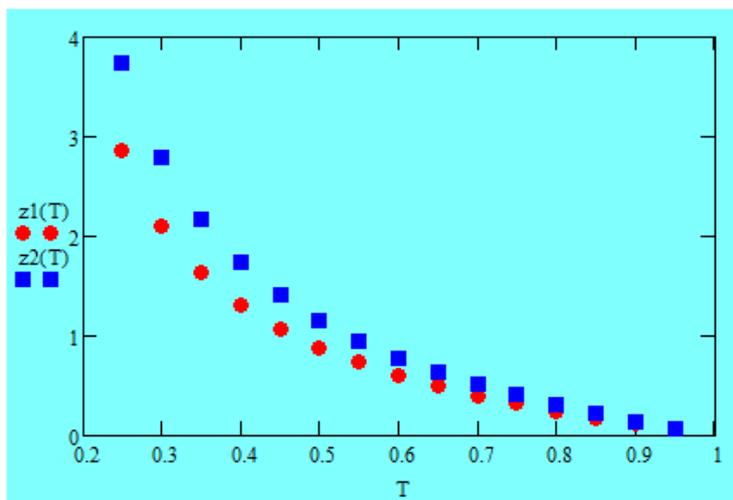


Рис. 3. Решение уравнения, возникающего в связи с задачей о лазерном зондировании атмосферы  
Fig. 3. Solution of the equation arising in connection with the problem of laser sensing of the atmosphere

### Решение уравнения, возникающего в задаче о дифракции света

При определении радиуса первого темного кольца в задаче о дифракции света на непрозрачном диске [3] необходимо решить уравнение  $J_1(z) - 0,5J_1(0,5z) = 0$ , где  $J_1(z)$  - функция Бесселя первого рода 1-го порядка. Если использовать интегральное представление для  $J_1(z)$ , то решение этого уравнения может служить примером рассматриваемого метода решения уравнений, содержащих неизвестную под знаком интеграла. На рис. 4 показано решение рассматриваемого уравнения при различных значениях параметра  $\alpha$  в виде таблицы и конкретное решение для  $\alpha = 0,5$ , чтобы можно было сравнить с решением в [3].

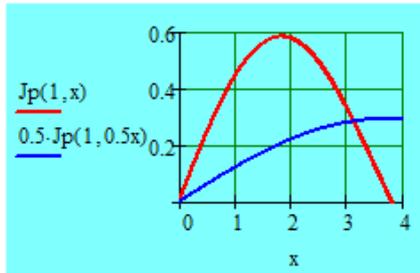
Решить уравнение  $J_1(z) - \alpha J_1(\alpha z) = 0$  возникающее в задаче о дифракции на непрозрачном диске. Составить таблицу решений для  $\alpha$ , пробегая значения от 0 до 1. Выделить решение для  $\alpha=0,5$ .

$$J_p(n, x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin(\phi) - n \cdot \phi) d\phi$$

-функция пользователя для интегрального представления функции Бесселя первого рода целочисленного порядка. Обозначение  $J_p(n, x)$  использовано для того чтобы отличать от встроенной в Mathcad функции.

$Z(\alpha) := \text{root}(J_p(1, z) - \alpha \cdot J_p(1, \alpha \cdot z), z, 1, 5)$  -формула для корней уравнения при различных  $\alpha$      $\alpha := 0, 0.1.. 1$

$Z(0.5) = 3.144$  - решение уравнения для  $\alpha=0.5$



-графическое представление первого и второго слагаемых левой части уравнения. При необходимости можно определить координату  $x$  точки пересечения графиков и сравнить графическое и численное решения.

$Z(\alpha) =$	$\alpha$
0	0
3.832	0.1
3.786	0.2
3.665	0.3
3.501	0.4
3.323	0.5
3.144	0.6
2.974	0.7
2.814	0.8
2.667	0.9
2.53	1

Рис. 4. Решение уравнения  $J_1(z) - \alpha J_1(\alpha z) = 0$ , содержащего неизвестную под знаком интеграла  
Fig. 4. Solution of the equation  $J_1(z) - \alpha J_1(\alpha z) = 0$  containing the unknown under the sign of the integral

При рассмотрении задач с краевыми условиями решение часто выражается в виде разложения по собственным функциям. Если задача обладает аксиальной симметрией, то собственными функциями являются функции Бесселя. Хотя формальная схема решения понятна, но определение коэффициентов разложения – не всегда простая задача. В сборниках задач по математической физике и в книгах, в которых используются уравнения с частными производными, очень часто решение задач записывается в виде ряда, в котором коэффициенты являются решением некоторого трансцендентного уравнения. Определение корней уравнения считается тривиальной задачей и предоставляется читателю. Следующие примеры с диффузией магнитного поля и ядерным реактором хорошо иллюстрируют подобную ситуацию.

### Определение корней функции в задаче о диффузии магнитного поля в полый цилиндр

Магнитное поле в полости полого цилиндрического проводника, внешний радиус которого  $b$ , а внутренний  $a$ , определяется формулой [4]:

$$H_z(a, t) = H_0 - 4H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\kappa_1 \alpha_n^2 t) \frac{J_2(\alpha \alpha_n) \cdot J_0(b \alpha_n)}{(\alpha \alpha_n)^2 [J_0^2(b \alpha_n) - J_2^2(\alpha \alpha_n)]},$$

где  $\kappa_1$  – коэффициент диффузии;  $\alpha_n$  – корни уравнения

$$J_0(b \alpha) Y_2(\alpha) - Y_0(b \alpha) J_2(\alpha) = 0;$$

$J, Y$  – функции Бесселя первого и второго рода и порядка  $n = 0, 2$ .

Определить первые 10 корней  $Z(n)$  функции  $f(z)$  встречающейся в задаче о диффузии магнитного поля в полый проводник, внешний радиус которого  $b$ , а внутренний  $a$ . Применить вместо встроенных функций Бесселя 1-го рода 0-го и 2-го порядков  $J_0(0,z)$  и  $J_0(2,z)$  функции пользователя  $Ju(0,x)$ ,  $Ju(2,x)$  использующих представление функции Бесселя в виде определенного интеграла.

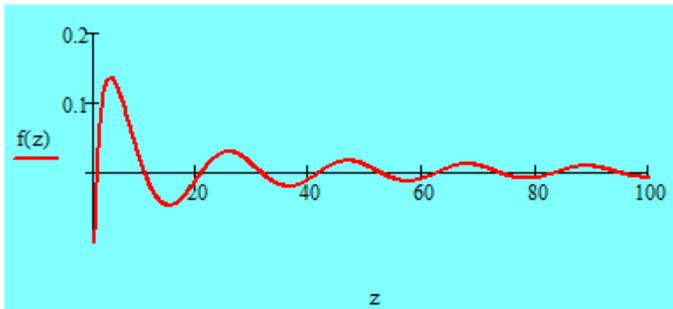
$b := 1$   $a := 0.7$  - частные значения внешнего и внутреннего радиуса полого цилиндра, в который диффундирует магнитное поле

$$Ju(n,x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(\phi) - n \cdot \phi) d\phi$$

-функция пользователя представляющая функцию Бесселя 1-го рода в виде определенного интеграла

$$f(z) := Ju(0, b \cdot z) \cdot Y_0(2, a \cdot z) - Ju(2, a \cdot z) \cdot Y_0(b \cdot z)$$

-функция, корни которой используются в формуле определяющей магнитное поле в полом цилиндре



-график функции  $f(z)$  при значениях аргумента  $2 < z < 100$

Программа для определения корней функции  $f(z)$ , таблица значений первых 10 корней  $f(z)$  и значение первого корня

```

Z(n) :=
  j ← 0
  x ← 1
  while j < n
    if sign(f(x)) ≠ sign(f(x + 1))
      Zj ← root(f(z), z, x, x + 1)
      j ← j + 1
    x ← x + 1
  Z

```

	0
0	2.963
1	11.297
2	21.38
3	31.711
4	42.11
5	52.538
6	62.98
7	73.431
8	83.888
9	94.346

$$Z(10)_0 = 2.963$$

Рис. 5. Вычисление корней уравнения  $f(z) = 0$ , содержащего неизвестную под знаком интеграла  
Fig. 5. Calculating the roots of the equation  $f(z) = 0$  containing the unknown under the sign of the integral

Воспользуемся этим примером для демонстрации заявленной возможности решения уравнения, содержащего неизвестную под знаком интеграла. Для этого введем функции пользователя  $Ju(n, x)$  ( $n = 0, 2$ ), представляющие функции Бесселя первого рода определенным интегралом, поскольку автору неизвестно, каким образом разработчики MathCAD определили встроенные функции Бесселя, а в контексте данной статьи необходимо именно интегральное представление хотя бы  $J_n(x)$ . Рассмотрим функцию, в которой вместо  $a$  будем использовать  $z$  ( $a$  похожа на  $a$ ):

$$f(z) = J_0(bz)Y_2(az) - Y_0(bz)J_2(az).$$

Алгоритм определения корней функции  $f(z)$  заключается в проверке знака  $f(z)$  при ближайших целочисленных значениях аргумента  $z$ . Аргумент  $z$  последовательно пробегает целочисленные значения от 1 до 100. Если знаки  $f(z)$  и  $f(z+1)$  противоположны, то ищется корень

$f(z)$  на отрезке  $(z, z + 1)$  с помощью функции **root**. Эти корни и подставляются в разложение для  $H_2(a, t)$ .

Конкретная реализация этого метода представлена на рис. 5.

### Определение критических размеров гомогенного цилиндрического ядерного реактора с отражателем нейтронов

Иногда преподаватели математической физики в качестве иллюстрации методов решения уравнений эллиптического типа рассматривают уравнение диффузии нейтронов в ядерном реакторе, более конкретно – задачу об определении критических размеров. Далее будет обсуждаться решение критического уравнения для цилиндрического реактора, которое представляет интерес в контексте данной статьи, поскольку неизвестный критический радиус содержится в неявном виде под знаком интеграла в уравнении, содержащем различные функции Бесселя. Прототипом реактора для данной задачи был гомогенный реактор сферической формы, построенный в Лос-Аламосе в 1944 г. Из описания этого реактора [5] взяты необходимые константы для цилиндрической модели, а метод получения формулы для критического радиуса описан в [6].

Рассматриваемый реактор имеет вид цилиндра. Активная зона, радиус которой надо определить, заполнена водным раствором сульфата уранила  $UO_2SO_4$ . Отношение  $^{238}U$  к  $^{235}U$  равно примерно 6 : 1. В радиальном направлении активная зона окружена отражателем из окиси бериллия. Толщина отражателя будет варьироваться с целью выяснения влияния отражателя на критический радиус активной зоны. Торцевые поверхности не закрыты отражателем, поскольку в этом случае уравнение диффузии нейтронов можно решить методом разделения переменных.

Вкратце опишем получение формулы, выражающей условие критичности и являющейся объектом приложения предлагаемого метода решения уравнений с неизвестной под знаком интеграла. Подробности ее вывода в [6].

Уравнения для потока нейтронов  $\Phi(r, z)$  в активной зоне и в отражателе имеют вид:

$$\Delta\Phi_1(r, z) + B_1 \cdot \Phi_1(r, z) = 0, \quad \Delta\Phi_2(r, z) + B_2 \cdot \Phi_2(r, z) = 0, \quad \text{где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ввиду аксиальной симметрии зависимость от угла опущена,  $B_1$  и  $B_2$  – константы.

Уравнения для потока нейтронов  $\Phi(r, z)$  решаются в цилиндрической системе координат  $r, z$  методом разделения переменных, т. е. предполагается, что:

$$\Phi_1(r, z) = f_1(r) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{H}\right), \quad \Phi_2(r, z) = f_2(r) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{H}\right).$$

Соответствующие граничные условия на торцевых поверхностях цилиндра имеют вид:

$$\Phi_1\left(r, \pm \frac{H}{2}\right) = 0, \quad \Phi_2\left(r, \pm \frac{H}{2}\right) = 0,$$

$H$  – высота цилиндра.

Уравнения для радиальной части оператора Лапласа для активной зоны и для отражателя имеют вид:

$$\Delta f_1(r) + \kappa^2 f_1(r) = 0, \quad \kappa^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2} - \left(\frac{\pi}{H}\right)^2,$$

$$\Delta f_2(r) - v^2 f_2(r) = 0, \quad v^2 = \frac{1}{M_2^2} + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2.$$

где  $M_1^2$  и  $M_2^2$  – площадь миграции нейтронов в активной зоне и в отражателе. Площадь миграции есть 1/6 среднего квадрата смещения нейтрона от точки, где он родился быстрым, до точки, где он поглотился тепловым.  $k_\infty$  – коэффициент размножения в бесконечной среде.

Решение этих уравнений имеет вид:

$$f_1(r) = A_1 \cdot J_0(\kappa \cdot r) + A_2 \cdot Y_0(\kappa \cdot r),$$

$$f_2(r) = C_1 \cdot I_0(v \cdot r) + C_2 \cdot K_0(v \cdot r).$$

Поскольку  $Y_0(\kappa \cdot r)$  имеет в начале координат особенность, то нужно считать, что  $A_2 = 0$ . Поэтому

$$f_1(r) = A_1 \cdot J_0(\kappa \cdot r).$$

Граничные условия на поверхности раздела активной зоны и отражателя

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad D_1 \cdot \nabla \Phi_1 = D_2 \cdot \nabla \Phi_2$$

приводит к уравнению, выражающему условие критичности:

$$\frac{\kappa \cdot J_1(\kappa \cdot R)}{J_0(\kappa \cdot R)} = v \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot \left\{ \frac{I_1(v \cdot R) \cdot K_0[v \cdot (R+T)] + K_1(v \cdot R) \cdot I_0[v \cdot (R+T)]}{K_0(v \cdot R) \cdot I_0[v \cdot (R+T)] - I_0(v \cdot R) \cdot K_0[v \cdot (R+T)]} \right\},$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – коэффициенты диффузии активной зоны и отражателя соответственно. Незвестная  $R$  и будет критическим радиусом, который нужно найти.

Приведем данное выражение к общему знаменателю и введем обозначения для левой  $g(R, T)$  и правой  $d(R, T)$  частей равенства, чтобы последующие формулы были менее громоздкими:

$$g(R, T) = \kappa \cdot D_1 \cdot J_1(\kappa \cdot R) \cdot \{K_0(v \cdot R) \cdot I_0[v \cdot (R+T)] - I_0(v \cdot R) \cdot K_0[v \cdot (R+T)]\},$$

$$d(R, T) = v \cdot D_2 \cdot J_0(\kappa \cdot R) \cdot \{I_1(v \cdot R) \cdot K_0[v \cdot (R+T)] + K_1(v \cdot R) \cdot I_0[v \cdot (R+T)]\}.$$

Тогда уравнение критичности будет иметь вид:

$$g(R, T) - d(R, T) = 0.$$

Дальнейшие вычисления представлены на рис. 6. Результаты вычислений представлены на графике зависимости критического радиуса активной зоны  $R$  от толщины отражателя  $T$ .

$$K0u(z) := \int_0^{20} e^{-z \cdot \cosh(\phi)} d\phi$$

$$K1u(z) := \frac{1}{2} \int_{-20}^{20} e^{-z \cdot \cosh(\phi) + \phi} d\phi$$

- интегральное представление функций Макдональда. Бесконечные пределы интегрирования заменены на конечные, ввиду быстрой сходимости интегралов.

$$I0u(z) := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\cosh(z \cdot t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$I1u(z) := \frac{z}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \cdot \cosh(z \cdot t) dt$$

- интегральные представления модифицированных функций Бесселя.

$$J0u(z) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(z \cdot \sin(\phi)) d\phi$$

$$J1u(z) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(z \cdot \sin(\phi) - \phi) d\phi$$

- интегральные представления функций Бесселя первого рода. Буква u отличает функции пользователя от встроенных

$\underline{H} := 35$  - высота цилиндра, см

$\underline{k} := 1.47$  - коэффициент размножения

$\underline{M1} := 5.87$

$\underline{M2} := 30$

- длина миграции в активной зоне и отражателе, см

$$\kappa := \sqrt{\frac{k-1}{M1^2} - \left(\frac{\pi}{H}\right)^2}$$

$$v := \sqrt{\frac{1}{M2^2} + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2}$$

- явные выражения коэффициентов в уравнениях диффузии для активной зоны  $\Delta f1(r) + \kappa^2 f1(r) = 0$  и для отражателя  $\Delta f2(r) - v^2 f2(r) = 0$

$\underline{D1} := 0.163$

$\underline{D2} := 0.56$

- коэффициенты диффузии в активной зоне и отражателе, см

$$g(T, R) := \kappa \cdot D1 \cdot J1u(\kappa \cdot R) \cdot [K0u(v \cdot R) \cdot I0u[v \cdot (R + T)] - K0u[v \cdot (R + T)] \cdot I0u(v \cdot R)]$$

- левая и правая часть условия критичности

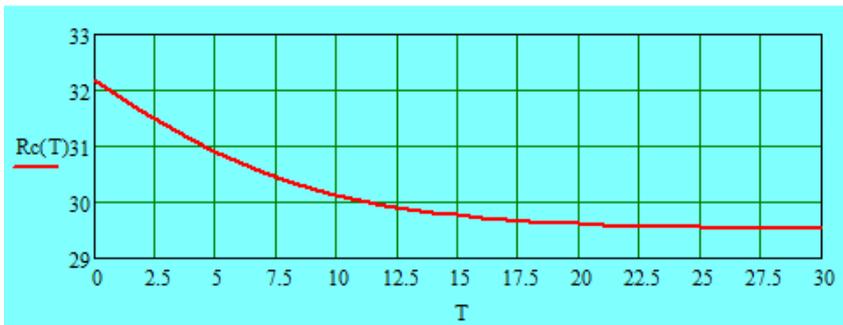
$$d(T, R) := v \cdot D2 \cdot J0u(\kappa \cdot R) \cdot [I1u(v \cdot R) \cdot K0u[v \cdot (R + T)] + K1u(v \cdot R) \cdot I0u[v \cdot (R + T)]]$$

$g(T, R) = d(T, R)$

$\underline{T} := 0..30$  - толщина отражателя, см

$\underline{Rc}(T) := \text{root}(g(T, R) - d(T, R), R, 20, 40)$

- численное решение уравнения для определения радиуса активной зоны Rc как функции толщины отражателя T



- график зависимости радиуса активной зоны Rc (см) от толщины отражателя T (см). Как и следовало ожидать, критический радиус уменьшается с увеличением толщины отражателя, но до определенного предела.

Рис. 6. Вычисление критического радиуса реактора  
Fig. 6. Calculating the critical radius of the reactor

### Вычисление энергетического спектра частицы в потенциальной яме с помощью правила квантования Бора – Зоммерфельда

Рассматриваемый метод решения уравнений, содержащих неизвестную под знаком интеграла, можно эффективно применять для определения энергетического спектра в квазиклассическом приближении. Правило квантования Бора – Зоммерфельда имеет вид

$$\oint p dx = 2\pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{или} \quad \int_a^b \sqrt{2m(E - U(x))} dx = \pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Определить уровни энергии электрона  $E3(n)$  в поле с потенциальной энергией  $U(x)$  рассматривая энергию  $E$  как неизвестную в условии Бора-Зоммерфельда. Использовать для решения функцию `root`. Вычислить  $E2(n)$  применяя формулу для энергии полученную путем аналитического вычисления интеграла в условии определяющем квазиклассический спектр энергии. Сравнить полученные результаты с точными собственными значениями оператора энергии  $E1(n)$

$m := 9.1 \cdot 10^{-28}$  г - масса электрона

$U0 := 1.6 \cdot 10^{-11}$  эрг - параметры определяющие ширину и глубину потенциальной ямы

$h := 6.63 \cdot 10^{-27}$  эрг с - постоянная Планка

$\alpha := 10^7$  см<sup>-1</sup>

$TOL := 10^{-15}$  - системная переменная определяющая точность вычислений

$U(x) := \frac{-U0}{\cosh(\alpha \cdot x)^2}$  - потенциальная энергия электрона

$$E1(n) := \frac{-1}{8 \cdot m} \cdot \left( \frac{h \cdot \alpha}{2 \cdot \pi} \right)^2 \cdot \left[ -(1 + 2 \cdot n) + \sqrt{1 + \frac{8 \cdot m \cdot U0}{(\alpha \cdot h)^2} \cdot (2 \cdot \pi)^2} \right]^2$$

$$E2(n) := \frac{-(h \cdot \alpha)^2}{8 \cdot m \cdot \pi^2} \left[ \sqrt{\frac{8 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot U0}{(h \cdot \alpha)^2} - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2} \right]^2$$

$$E3(n) := \text{root} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha} \cdot \text{acosh} \left( \sqrt{\frac{-U0}{En}} \right) \\ - \frac{1}{\alpha} \cdot \text{acosh} \left( \sqrt{\frac{-U0}{En}} \right) \end{array} \int \sqrt{2 \cdot m \cdot (En - U(x))} \, dx - \frac{h}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right), En, -(1.35 \cdot 10^{-11}), -(2.5 \cdot 10^{-14}) \right]$$

$n := 1..10$  - номера значений энергии

$ORIGIN := 1$  - системная переменная определяющая начало отсчета номера значений

E1(n) =		E2(n) =		E3(n) =	
	1		1		1
1	-1.318·10 <sup>-11</sup>	1	-1.317·10 <sup>-11</sup>	1	-1.317·10 <sup>-11</sup>
2	-1.145·10 <sup>-11</sup>	2	-1.144·10 <sup>-11</sup>	2	-1.144·10 <sup>-11</sup>
3	-9.836·10 <sup>-12</sup>	3	-9.824·10 <sup>-12</sup>	3	-9.824·10 <sup>-12</sup>
4	-8.346·10 <sup>-12</sup>	4	-8.335·10 <sup>-12</sup>	4	-8.335·10 <sup>-12</sup>
5	-6.978·10 <sup>-12</sup>	5	-6.968·10 <sup>-12</sup>	5	-6.969·10 <sup>-12</sup>
6	-5.732·10 <sup>-12</sup>	6	-5.723·10 <sup>-12</sup>	6	-5.723·10 <sup>-12</sup>
7	-4.609·10 <sup>-12</sup>	7	-4.601·10 <sup>-12</sup>	7	-4.601·10 <sup>-12</sup>
8	-3.608·10 <sup>-12</sup>	8	-3.601·10 <sup>-12</sup>	8	-3.601·10 <sup>-12</sup>
9	-2.73·10 <sup>-12</sup>	9	-2.723·10 <sup>-12</sup>	9	-2.724·10 <sup>-12</sup>
10	-1.974·10 <sup>-12</sup>	10	-1.968·10 <sup>-12</sup>	10	-1.969·10 <sup>-12</sup>

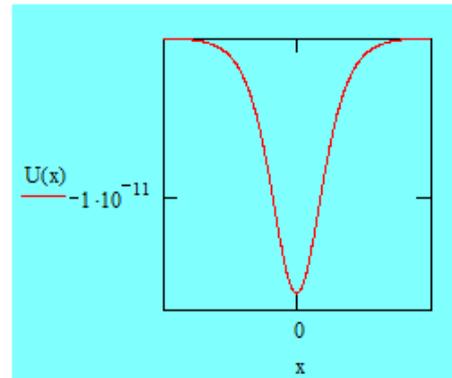


Рис. 7. Вычисление энергетического спектра электрона в потенциальной яме  
Fig. 7. Calculation of the energy spectrum of an electron in a potential well

Если потенциальная энергия  $U(x)$  известна, то это уравнение в неявном виде определяет энергию  $E$  при заданных целочисленных значениях  $n$ . Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих возможности метода. Сначала рассмотрим движение электрона в поле

$$U(x) = \frac{-U_0}{ch(\alpha x)^2}.$$

Известно точное решение этой задачи [7] и решение в квазиклассическом приближении [8]. Эти решения использовались для сравнения с результатами численного расчета, представленными на рис. 7:  $E1(n)$  – значения энергии, полученные из точного решения задачи,  $E2(n)$  – значения энергии, полученные с помощью аналитического вычисления интеграла в условии Бора – Зоммерфельда,  $E3(n)$  – значения энергии, полученные с помощью численного решения.

Следующий пример несколько более сложен, поскольку необходимо решать уравнения для определения точек остановки, т. е. численно определять пределы интегрирования (рис. 8). Кроме того, интеграл не вычисляется аналитически. Определим энергетический спектр, если частица движется в поле

$$U(x) = x \cdot \text{arctg}(x).$$

Для простоты будем считать, что  $2m = \hbar = 1$ , т. е. правило Бора – Зоммерфельда имеет вид

$$\int_a^b \sqrt{E - U(x)} dx = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Вычислить первые 10 значений энергии  $E_x(n)$  в поле  $U(x)=x \cdot \text{arctg}(x)$ .

$$E_x(n) := \text{root} \left[ \int_{\text{root}(E-x \cdot \text{atan}(x), x, -10, 0)}^{\text{root}(E-x \cdot \text{atan}(x), x, 0, 10)} \sqrt{E - x \cdot \text{atan}(x)} dx - \pi \cdot \left( n + \frac{1}{2} \right), E, 0, 12 \right]$$

Для простоты масса  $m=0.5$ , а постоянная Планка  $\hbar/(2\pi)=1$

$n := 1..10$

E <sub>x</sub> (n) =	
	0
0	2.35
1	3.562
2	4.639
3	5.626
4	6.546
5	7.414
6	8.241
7	9.033
8	9.795
9	10.531

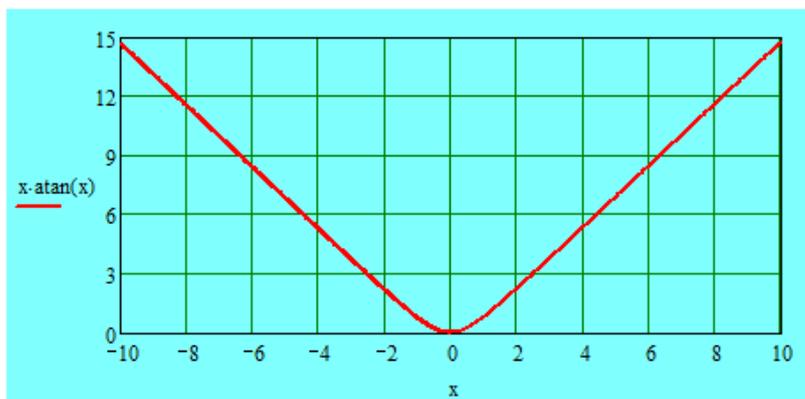


Рис. 8. Вычисление энергетического спектра в поле  $U(x) = x \cdot \text{arctg}(x)$   
 Fig. 8. Calculation of energy spectrum in the field  $U(x) = x \cdot \text{arctg}(x)$

### Эффект Штарка в атоме водорода

Рассмотрим вычисление энергии атома водорода в электрическом поле с использованием квазиклассического приближения. При больших значениях главного квантового числа  $n$  не выполняется критерий применимости метода возмущений, а метод ВКБ, напротив, тем точнее, чем больше значение главного квантового числа  $n$ . Следуя [7], опишем получение формул для определения спектра ВКБ. Для упрощения формул используются атомные единицы, т. е. полагаем, что масса электрона  $m = 1$ , заряд электрона  $e = 1$ , постоянная Планка  $\hbar = 1$ . Единицей энергии будет  $me^4/\hbar^2 = 27,21$  эВ, напряженности борковский радиус  $a = \hbar^2/(me^2) = 5,29 \cdot 10^{-9}$  см будет единицей длины, а единицей электрического поля будет напряженность поля, создаваемого протоном на расстоянии, равном боровскому радиусу  $e/a^2 = 5,142 \cdot 10^9$  В/м. Напряженность поля будет обозначаться буквой  $F$ . Ввиду аксиальной симметрии целесообразно использовать параболические координаты  $\xi, \eta, \phi$ . Уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода в параболических координатах имеет вид:

$$\frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{4}{\xi + \eta} \psi - F(\xi - \eta) \psi = -2E\psi.$$

Это уравнение допускает разделение переменных, в результате которого получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{df_1}{d\xi} \right) + \left( \frac{E}{2} \xi - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{F}{4} \xi^2 \right) f_1 &= -\beta_1 f_1, \\ \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{df_2}{d\eta} \right) + \left( \frac{E}{2} \eta - \frac{m^2}{4\eta} + \frac{F}{4} \eta^2 \right) f_2 &= -\beta_2 f_2, \\ \beta_1 + \beta_2 &= 1. \end{aligned}$$

С помощью подстановки

$$f_1 = \frac{\chi_1}{\sqrt{\xi}}, \quad f_2 = \frac{\chi_2}{\sqrt{\eta}}$$

получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \chi_1}{d\xi^2} + \left( \frac{E}{2} + \frac{\beta_1}{\xi} - \frac{m^2 - 1}{4\xi^2} - \frac{F}{4} \xi \right) \chi_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \chi_2}{d\eta^2} + \left( \frac{E}{2} + \frac{\beta_2}{\eta} - \frac{m^2 - 1}{4\eta^2} + \frac{F}{4} \eta \right) \chi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Каждое из этих уравнений имеет вид одномерного уравнения Шредингера, в котором роль полной энергии выполняет  $E/4$ , а потенциальные энергии представлены как

$$U_1(\xi) = -\frac{\beta_1}{2\xi} + \frac{m^2 - 1}{8\xi^2} + \frac{F}{8}\xi, \quad U_2(\eta) = -\frac{\beta_2}{2\eta} + \frac{m^2 - 1}{8\eta^2} - \frac{F}{8}\eta.$$

В этих формулах в дальнейшем будут использованы обозначения:  $\beta_1 = \beta$ ,  $\beta_2 = 1 - \beta$ . Кроме того, вместо  $m^2 - 1$  будем писать  $m^2$ , поскольку в примечании к соответствующему параграфу [7] отмечается, что подробное исследование приводит к выводу о том, что такая замена дает более точные результаты. Окончательно

$$U_1(\xi) = U1(\xi) = -\frac{\beta}{2\xi} + \frac{m^2}{8\xi^2} + \frac{F}{8}\xi, \quad U_2(\eta) = U2(\eta) = -\frac{1-\beta}{2\eta} + \frac{m^2}{8\eta^2} - \frac{F}{8}\eta.$$

Согласно правилу квантования Бора – Зоммерфельда имеем:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{2 \left( \frac{E}{4} - U1(\xi) \right)} d\xi = \left( n1 + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{2 \left( \frac{E}{4} - U2(\eta) \right)} d\eta = \left( n2 + \frac{1}{2} \right) \pi.$$

Эти формулы будут объектом приложения рассматриваемой методики решения уравнений для нахождения  $E$  и константы разделения  $\beta$ .

Для решения системы из двух уравнений с двумя неизвестными используем блок Given – Find, описанный во введении.

Кроме того, верхние и нижние пределы интегрирования  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  зависят от энергии  $E$  и для нахождения диапазона изменения  $\xi$  и  $\eta$  необходимо использовать решения уравнений

$E/4 - U1(\xi) = 0$ ,  $E/4 - U2(\eta) = 0$ , т. е. на верхнем и нижнем пределах интегрирования должны быть написаны выражения типа

$$\text{root}\left(\frac{E}{4} - U1(\xi), \xi, \xi1, \xi2\right), \text{root}\left(\frac{E}{4} - U2(\eta), \eta, \eta1, \eta2\right).$$

$$U1(\beta, m, F, \xi) := \frac{-\beta}{2 \cdot \xi} + \frac{m^2}{8 \cdot \xi^2} + \frac{F}{8} \cdot \xi \quad U2(\beta, m, F, \eta) := \frac{-(1-\beta)}{2 \cdot \eta} + \frac{m^2}{8 \cdot \eta^2} - \frac{F}{8} \cdot \eta$$

- функции выполняющие роль потенциальной энергии

$m := 1$  - азимутальное квантовое число  $n1 := 2$   $n2 := 2$  - параболические квантовые числа

$F := 0$  - напряженность поля, поле отсутствует  $n := n1 + n2 + m + 1$  - главное квантовое число

$\beta := 0.45$   $E := -0.015$  - предполагаемые значения корней системы уравнений, константы разделения и энергии

Given

$$\int_{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U1(\beta, m, F, \xi), \xi, 0.2, 1\right)}^{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U1(\beta, m, F, \xi), \xi, 1, 155\right)} \sqrt{2\left(\frac{E}{4} - U1(\beta, m, F, \xi)\right)} d\xi = \pi \cdot \left(n1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U2(\beta, m, F, \eta), \eta, 0.2, 1\right)}^{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U2(\beta, m, F, \eta), \eta, 1, 125\right)} \sqrt{2\left(\frac{E}{4} - U2(\beta, m, F, \eta)\right)} d\eta = \pi \cdot \left(n2 + \frac{1}{2}\right)$$

Find( $\beta, E$ ) =  $\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.01389 \end{pmatrix}$  - вычисленные значения константы разделения и энергии в отсутствии внешнего поля, значение энергии при  $n=6$  по точной формуле  $E = -1/(2n^2) = -1/72 = -0.01389$

$F := 0.00002$  - значение напряженности поля,  $F \sim 10^5$  В/см

Given

$$\int_{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U1(\beta, m, F, \xi), \xi, 0.2, 1\right)}^{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U1(\beta, m, F, \xi), \xi, 1, 155\right)} \sqrt{2\left(\frac{E}{4} - U1(\beta, m, F, \xi)\right)} d\xi = \pi \cdot \left(n1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U2(\beta, m, F, \eta), \eta, 0.2, 1\right)}^{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U2(\beta, m, F, \eta), \eta, 1, 125\right)} \sqrt{2\left(\frac{E}{4} - U2(\beta, m, F, \eta)\right)} d\eta = \pi \cdot \left(n2 + \frac{1}{2}\right)$$

Find( $\beta, E$ ) =  $\begin{pmatrix} 0.50964 \\ -0.01391 \end{pmatrix}$  - вычисленные значения константы разделения и энергии при значении напряженности поля  $F \sim 10^5$  В/см

$$E_p := \frac{-1}{2 \cdot n^2} + \frac{3}{2} \cdot F \cdot n \cdot (n1 - n2) - \frac{F^2}{16} \cdot n^4 \cdot [17 \cdot n^2 - 3 \cdot (n1 - n2)^2 - 9 \cdot m^2 + 19] \quad E_p = -0.01391$$

- энергия по теории возмущений

Рис. 9. Вычисление энергии электрона в атоме водорода при отсутствии поля и при наличии электрического поля.

Для сравнения приведен результат, полученный по теории возмущений

Fig. 9. Calculation of the electron energy in the hydrogen atom in the absence of a field and in the presence of an electric field. The result obtained by perturbation theory is given for comparison

На рис. 9 вначале представлено решение для небольших значений  $n_1$  и  $n_2$  при отсутствии поля, из которого следует, что вычисленное значение энергии  $E$  соответствует значениям, полученным из точной формулы  $E = -1/(2n^2)$ . Второй этап тестирования заключается в сравнении результатов, полученных для энергии  $E$  в присутствии поля по теории возмущений и с помощью квазиклассического приближения. Результаты вычислений совпадают. Наконец, на рис. 10 приведены результаты вычислений для ридберговских состояний при наличии поля, т. е. состояния с большим значением главного квантового числа  $n = 82$ . Из полученных результатов можно сделать вывод о работоспособности метода.

$$U_1(\beta, m, F, \xi) := \frac{-\beta}{2 \cdot \xi} + \frac{m^2}{8 \cdot \xi^2} + \frac{F \cdot \xi}{8} \quad U_2(\beta, m, F, \eta) := \frac{-(1 - \beta)}{2 \cdot \eta} + \frac{m^2}{8 \cdot \eta^2} - \frac{F \cdot \eta}{8}$$

- функции выполняющие роль потенциальной энергии в одномерном уравнении Шредингера

$m := 1$  - азимутальное квантовое число

$n_1 := 35$   $n_2 := 45$  - параболические квантовые числа

$n := n_1 + n_2 + m + 1$   $n = 82$  - главное квантовое число

$E_n := \frac{-1}{2 \cdot n^2}$   $E_n = -7.436 \times 10^{-5}$  - величина энергии в отсутствии внешнего поля  $F=0$  соответствующая значению  $n=82$

$F := 2 \cdot 10^{-9}$  - напряженность поля,  $F \sim 10$  В/м

$E_w := -7 \cdot 10^{-5}$   $\beta_w := 0.5$  - предполагаемые значения корней системы уравнений

Given

$$\int_{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U_1(\beta, m, F, \xi), \xi, 1, 25000\right)}^{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U_1(\beta, m, F, \xi), \xi, 0.2, 1\right)} \sqrt{2\left(\frac{E}{4} - U_1(\beta, m, F, \xi)\right)} d\xi = \pi \cdot \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U_2(\beta, m, F, \eta), \eta, 1, 25000\right)}^{\text{root}\left(\frac{E}{4} - U_2(\beta, m, F, \eta), \eta, 0.2, 1\right)} \sqrt{2\left(\frac{E}{4} - U_2(\beta, m, F, \eta)\right)} d\eta = \pi \cdot \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)$$

Find( $\beta, E$ ) =  $\begin{pmatrix} 0.473 \\ -7.82 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$  - значения константы разделения и энергии при напряженности поля  $F \sim 10$  В/м

Рис. 10. Пример вычисления энергии ридберговского состояния  $n = 82$  при наличии электрического поля с помощью правила квантования Бора – Зоммерфельда

Fig. 10. Example of calculation of the energy of the Rydberg state  $n=82$  in the presence of an electric field using the Bohr – Sommerfeld quantization rule

### Вычисление параметров релятивистского ферми-газа

Для определения значений энергии  $E$  и давления  $p$  релятивистского газа фермионов используются формулы [9]:

$$E = 8\pi V \frac{m^4 c^5}{h^3} \int_0^\infty \frac{sh^2\theta \cdot ch^2\theta d\theta}{e^{\beta(mc^2 ch\theta - \mu)} + 1}, \quad p = \frac{8\pi}{3} \frac{m^4 c^5}{h^3} \int_0^\infty \frac{sh^4\theta d\theta}{e^{\beta(mc^2 ch\theta - \mu)} + 1}.$$

Здесь

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 \operatorname{ch} \theta, \quad \beta = \frac{1}{kT},$$

где  $\theta$  – параметр, а остальные обозначения общеприняты. Специфика проблемы в том, что, как и в нерелятивистском случае, для вычисления  $E$  и  $p$  необходимо знать химический потенциал  $\mu$ , который зависит от количества частиц  $N$  в объеме  $V$  и температуры  $T$  и выражается в неявном виде посредством формулы:

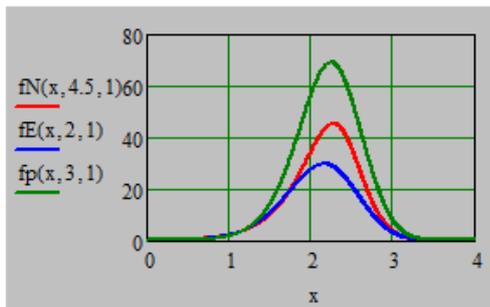
$$N = 8\pi V \left( \frac{mc}{h} \right)^3 \int_0^\infty \frac{sh^2 \theta \cdot ch \theta d\theta}{e^{\beta(mc^2 ch \theta - \mu)} + 1}.$$

$m := 9.1 \cdot 10^{-28}$  г - масса электрона  $h := 6.63 \cdot 10^{-27}$  эрг с - постоянная Планка  $c := 3 \cdot 10^{10}$  см/с - скорость света

$$fN(x, \mu, T) := \frac{\sinh(x)^2 \cdot \cosh(x)}{e^{\frac{\cosh(x) - \mu}{T}} + 1}$$

$$fE(x, \mu, T) := \frac{\sinh(x)^2 \cdot \cosh(x)^2}{e^{\frac{\cosh(x) - \mu}{T}} + 1}$$

$$fp(x, \mu, T) := \frac{\sinh(x)^4}{e^{\frac{\cosh(x) - \mu}{T}} + 1}$$



$$fN(4, 4.5, 1) = 2.528 \times 10^{-6}$$

$$fE(4, 2, 1) = 5.667 \times 10^{-6}$$

$$fp(4, 3, 1) = 1.538 \times 10^{-5}$$

- графики подынтегральных функций и значения этих функций на верхнем пределе интегрирования иллюстрирующие возможность замены на верхнем пределе интегрирования бесконечности конечным числом, например  $x=4$

$N(\mu, T, V) := 8 \cdot \pi \cdot V \cdot \left( \frac{m \cdot c}{h} \right)^3 \cdot \int_0^4 fN(x, \mu, T) dx$  - формула связывающая количество частиц  $N$  в объеме  $V$  с температурой  $T$  и химическим потенциалом  $\mu$ . Если заданы  $N$ ,  $V$ ,  $T$ , то она в неявном виде определяет  $\mu$ .

$N := 3.5 \cdot 10^{30}$  - число электронов в объеме  $V$   $V := 1$  см<sup>3</sup> - объем  $T := 0.3$  - температура в ед.  $mc^2$

$$\mu := \operatorname{root} \left[ \int_0^4 8 \cdot \pi \cdot V \cdot \left( \frac{m \cdot c}{h} \right)^3 \cdot fN(x, \mu, 0.3) dx - N, \mu, 1, 5 \right]$$

$$\mu = 1.905$$

-вычисление химического потенциала  $\mu$  в ед.  $mc^2$  с помощью функции `root` при заданных температуре  $T$  и концентрации частиц  $N/V$ .

$$E(\mu, T) := 8 \cdot \pi \cdot V \cdot \frac{m^4 \cdot c^5}{h^3} \cdot \int_0^4 fE(x, \mu, T) dx$$

$$p(\mu, T) := \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \frac{m^4 \cdot c^5}{h^3} \cdot \int_0^4 fp(x, \mu, T) dx$$

- вычисление энергии  $E$  и давления ферми-газа  $p$  при заданных температуре  $T$  и количестве частиц  $N$ , а также определенного значения  $\mu$

$$E(\mu, T) = 5.604 \times 10^{24} \text{ эрг}$$

$$p(\mu, T) = 1.344 \times 10^{24} \text{ дин/см}^2$$

Рис. 11. Вычисление энергии  $E$  и давления  $p$  релятивистского газа электронов при заданных температуре  $T$  и концентрации  $N/V$

Fig. 11. Calculation of energy  $E$  and pressure  $p$  of relativistic electron gas at given temperature  $T$  and concentration  $N/V$

Если газ ультрарелятивистский  $\varepsilon = pc$  или вырожденный, то можно получить более простые формулы [10]. Но для конкретных значений  $N$ ,  $V$ ,  $T$  удобно вычислять химический потенциал  $\mu$  как корень уравнения, содержащего неизвестную под знаком интеграла, т. е. применить рассматриваемый метод. Для удобства будем в показателе экспоненты под знаком интеграла выражать энергию  $\varepsilon$  химический потенциал  $\mu$  и  $kT$  в единицах  $mc^2$ , т. е. введем обозначения:

$$\varepsilon \rightarrow \frac{mc^2 ch\theta}{mc^2} = ch\theta, \quad \frac{\mu}{mc^2} \rightarrow \mu, \quad \frac{kT}{mc^2} \rightarrow T, \quad \beta(mc^2 ch\theta - \mu) \rightarrow \frac{ch\theta - \mu}{T}.$$

Кроме того, при численном вычислении интеграла бесконечность заменяется конечным числом, например 1000. Но в нашем случае верхний предел не будет превышать 4, поскольку в знаменателе стоит экспонента с гиперболической функцией в показателе, т. е. экспонента в экспоненциальной степени и при относительно небольших значениях параметра  $\theta$  знаменатель может превысить  $10^{308}$  – предельное число, с которым может работать MathCAD. На рис. 11 приведены графики подынтегральных функций, из которых можно оценить значение верхнего предела интегрирования. Значения температуры  $T$  и концентрации электронов  $N/V$  взяты достаточно произвольно, хотя и близко к характерным значениям для массивных звезд на заключительных этапах эволюции.

### Выводы

Приведенные примеры продемонстрировали эффективность методов решения уравнений, содержащих неизвестную под знаком интеграла. Помимо того, что представленный материал может быть использован для семинарских занятий, ряд примеров имеет самостоятельное значение. Имеется в виду определение спектра ВКБ квантовых систем, вычисление химического потенциала релятивистского газа Ферми – Дирака.

### Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1973. С. 69–70.
2. Никифоров А. Ф., Уваров В. В. Специальные функции математической физики. М.: Наука 1984. С. 301–304.
3. Руссо М., Матье Ж. П. Задачи по оптике. М.: Мир, 1976. 177 с.
4. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972. 87 с.
5. Стефенсон Р. Введение в ядерную технику. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 135, 136, 227.
6. Бартоломей Г. Г. и др. Основы теории и методы расчета ядерных энергетических реакторов. М.: Энергоатомиздат, 1982. С. 206, 207.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1989. С. 99, 100, 348, 349.
8. Гольдман И. И. и Кривченков В. Д. Сборник задач по квантовой механике. М.: ГИТТЛ, 1957. С. 57, 58.
9. Кубо Р. Статистическая механика М.: Мир, 1968. С. 310, 311.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976. Ч. 1. С. 199–201.

### References

1. Landau L. D., Lifshits E. M. Mechanics. Moscow, Nauka publ., 1973, p. 69, 70. (in Russ.)
2. Nikiforov A. F., Uvarov V. V. Special Functions of Mathematical Physics. Moscow, Nauka publ., 1984, pp. 301–304. (in Russ.)
3. Rousseau M., Mathieu J. P. Tasks on optics. Moscow, Mir publ., 1976, p. 177. (in Russ.)
4. Knopfel G. Pulsed high magnetic fields. Moscow, Mir publ., 1972, p. 87. (in Russ.)

5. **Stephenson R.** Introduction to nuclear engineering. Moscow, GITTL, 1956, p.135, 136, 227. (in Russ.)
6. **Bartolomei G. G. et al.** Fundamentals of Theory and Methods of Calculation of Nuclear Power Reactors. Moscow, Energoatomizdat, 1982, p. 206, 207. (in Russ.)
7. **Landau L. D., Lifshits E. M.** Quantum Mechanics. Moscow, Nauka publ., 1989, p. 99, 100, 348, 349. (in Russ.)
8. **Goldman I. I. and Krivchenkov V. D.** Collection of Problems on Quantum Mechanics. Moscow, GITTL, 1957, p. 57, 58. (in Russ.)
9. **Kubo R.** Statistical Mechanics Moscow, Mir publ., 1968, p. 310, 311. (in Russ.)
10. **Landau L. D., Lifshits E. M.** Statistical Physics. Moscow, Nauka publ., 1976, ch. 1, p. 199–201. (in Russ.)

### Сведения об авторе

**Пипич Петр Васильевич**, преподаватель

### Information about the Author

**Petr V. Pipich**, Lecturer

*Статья поступила в редакцию 04.09.2024;  
одобрена после рецензирования 30.09.2024; принята к публикации 10.10.2024*

*The article was submitted 04.09.2024;  
approved after reviewing 30.09.2024; accepted for publication 10.10.2024*

## Информация для авторов

---

«Сибирский физический журнал» публикует обзорные, оригинальные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и методике преподавания физики в различных разделах науки, соответствующих направлениям подготовки на кафедрах физического факультета НГУ. Журнал издается на русском языке, однако возможна публикация статей иностранных авторов на английском языке.

1. Очередность публикации статей определяется их готовностью к печати. Рукописи, оформленные без соблюдения правил, к рассмотрению не принимаются.

Вне очереди печатаются краткие сообщения (не более четырех журнальных страниц), требующие срочной публикации и содержащие принципиально новые результаты научных исследований, проводимых в рамках тематики журнала.

Рекламные материалы публикуются при наличии гарантии оплаты, устанавливаемой по соглашению сторон.

2. В журнале печатаются результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях. Публикация не должна нарушить авторского права других лиц или организаций.

Направляя свою рукопись в редакцию, авторы автоматически передают учредителям и редколлегии права на издание данной статьи на русском или английском языке и на ее распространение в России и за рубежом. При этом за авторами сохраняются все права как собственников данной рукописи. В частности, согласно международным соглашениям о передаче авторских прав за авторами остается право копировать опубликованную статью или ее часть для их собственного использования и распространения внутри учреждений, сотрудниками которых они являются. Копии, сделанные с соблюдением этих условий, должны сохранять знак авторского права, который появился в оригинальной опубликованной работе. Кроме того, авторы имеют право повторно использовать весь этот материал целиком или частично в компиляциях своих собственных работ или в учебниках, авторами которых они являются. В этих случаях достаточно включить полную ссылку на первоначально опубликованную статью.

3. Направлять рукописи в редакцию авторам рекомендуется по электронной почте либо приносить в редакцию электронную версию (в форматах MS WORD – \*.doc, или \*.docx, или \*.rtf) на диске или флэш-памяти. Такая отправка исходных материалов значительно ускоряет процесс рецензирования.

Авторам предлагается посылать свои сообщения в наиболее сжатой форме, совместимой с ясностью изложения, в совершенно обработанном и окончательном виде, предпочтительно без формул и выкладок промежуточного характера и громоздких математических выражений. Не следует повторять в подписях к рисункам пояснений, уже содержащихся в тексте рукописи, а также представлять одни и те же результаты и в виде таблиц, и в виде графиков.

Рекомендованный объем присылаемых материалов: обзорные статьи – до 25-ти страниц, оригинальные материалы – до 12-ти страниц, краткие сообщения – до 4-х страниц. В любом случае объем рукописи должен быть логически оправданным.

Не рекомендуется предоставление электронных копий рукописей в формате LATEX. По техническим условиям издательства в этом случае рукопись будет преобразована редакцией в формат MS WORD, что может привести к значительному увеличению времени обработки рукописи и искажениям авторского текста.

Сокращений слов, кроме стандартных, применять нельзя. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы.

4. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название, номер журнала и фамилию автора;
- использовать attach (присоединение);

- в случае больших объемов информации возможно использование общеизвестных архиваторов (ARJ, ZIP, RAR);
- в состав электронной версии рукописи должны входить:
- файл, содержащий текст рукописи со вставленными в него рисунками;
- отдельные файлы с рисунками высокого качества;
- файл со сведениями об авторах (полностью фамилия, имя, отчество, ученые степень и звание, место работы, служебный адрес и телефон, адрес электронной почты для оперативной связи);
- файл с переводом на английский язык следующей информации: ФИО авторов, аффилиация, адрес, название статьи, аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, названия таблиц.

Авторы вставляют рисунки и таблицы в текст рукописи так, как считают нужным. Рукопись обязательно должна быть подписана автором, а при наличии нескольких авторов – всеми соавторами.

Редакция обращает внимание авторов на возможность и целесообразность использования цветного графического материала.

5. В начале рукописи должны быть указаны индекс УДК, название статьи, ФИО авторов (полностью), название и почтовый адрес учреждений, в которых выполнена работа, аннотация, содержащая основные результаты и выводы работы (в английском варианте не менее 1 000 знаков, русский вариант должен соответствовать английскому), ключевые слова, сведения о финансовой поддержке работы.

**Например:**

УДК 29.19.37; 47.03.08

**Оценка конвективного массопереноса**

**Иван Иванович Иванов**

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
Сибирского отделения Российской академии наук  
Новосибирск, Россия  
ivan@academ.org, <https://orcid.org/xxxx-xxxx-xxxx-xxxx>

Аннотация

Ключевые слова

Благодарности

**Evaluation of Convective Mass Transfer**

**Ivan I. Ivanov**

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics  
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences  
Novosibirsk, Russian Federation  
ivan@academ.org, <https://orcid.org/xxxx-xxxx-xxxx-xxxx>

Abstract

Keywords

Acknowledgements

Основной текст статьи

**Список литературы / References (в порядке цитирования)****Сведения об авторе / Information about the Author**

**Иванов Иван Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор  
Ivan I. Ivanov, Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor  
WoS Researcher ID  
Scopus Author ID  
SPIN

Подпись автора (авторов)

6. Параметры страницы: формат – А4; ориентация – книжная; поля (*см*): слева – 2,5; справа – 1; сверху – 2,5; снизу – 2,3; от края до нижнего колонтитула – 1,3.

7. Основной текст: стиль – «Обычный»: гарнитура (шрифт) Times New Roman (Сур), кегль (размер) 12 пунктов, абзацный отступ – 0,5 см, через 1,5 интервала, выравнивание – по ширине.

В тексте рукописи следует избегать аббревиатур, даже таких общепринятых, как ЭДС, ВТСП и т. п. Использование аббревиатур и простых химических формул в заголовках рукописей совершенно недопустимо. Следует писать: высокотемпературная сверхпроводимость, кремний, арсенид галлия и т. п., давая при необходимости соответствующую аббревиатуру или химическую формулу в тексте. Исключение могут составлять формулы сложных химических соединений. Каждое первое употребление аббревиатуры в тексте должно быть четко пояснено.

**Не следует:**

- производить табуляцию;
- разделять абзацы пустой строкой;
- использовать макросы, сохранять текст в виде шаблона и с установкой «только для чтения»;
- распределять текст по двум или более столбцам;
- расставлять принудительные переносы.

8. Таблицы должны иметь заголовки (на русском и английском языках). В таблицах обязательно указываются единицы измерения величин.

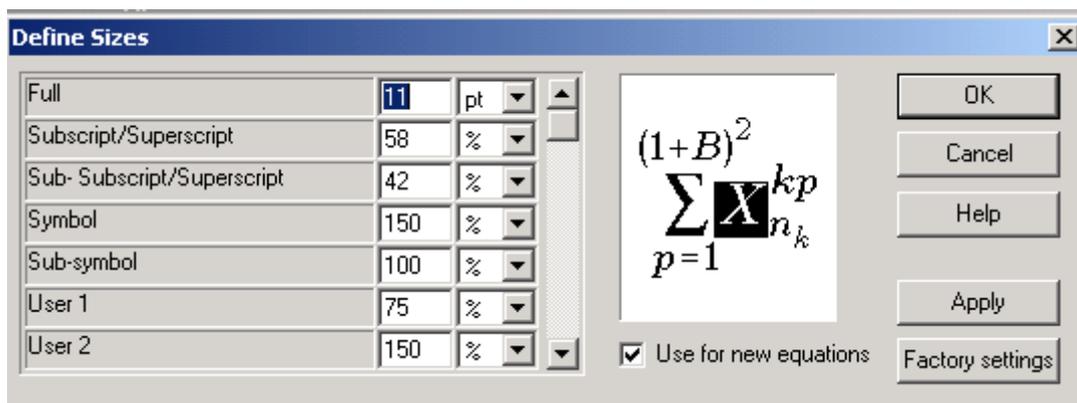
9. Число рисунков должно быть логически оправданным, качество – высоким. Файлы изображений должны находиться в том же каталоге, что и основной документ, и иметь имена, соответствующие номерам рисунков в рукописи (например, 09.tif или 22a.jpg).

10. Подписи к рисункам (на русском и английском языках) в электронной версии рукописи выполняются под рисунками, точка в конце не ставится. Если имеется несколько рисунков, объединенных одной подписью, они обозначаются русскими строчными буквами: а, б, в...

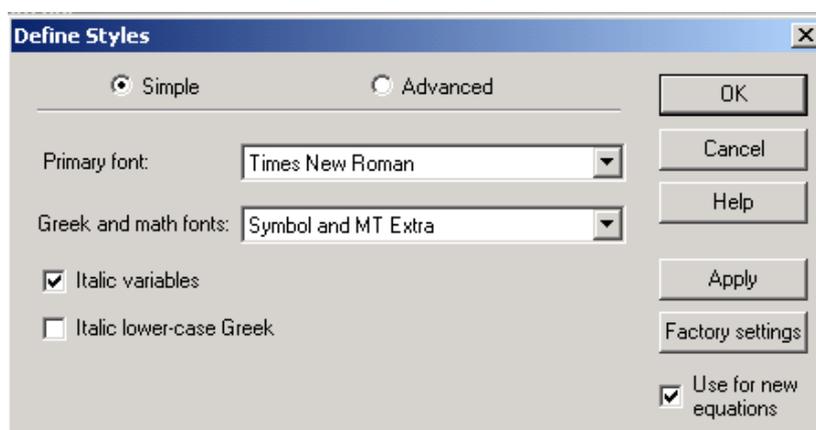
11. Формулы набираются в редакторе формул Microsoft Equation MathType в подбор к тексту или отдельной строкой по центру, **кегель 11 пт**.

Нумерация формул сквозная, в круглых скобках, прижатых к правому полю. Нумеровать следует только те формулы, на которые есть ссылки в тексте.

## Настройки редактора формул



а



б

12. Библиографические ссылки. В тексте в квадратных скобках арабскими цифрами указывается порядковый номер научного труда в библиографическом списке, например: [2; 3], [4–6] и т. д. В конце рукописи помещается список литературы в порядке упоминания в рукописи. Ссылки на российские издания приводятся на русском языке и сопровождаются переводом на английский язык (в отдельной строке, но под тем же номером). Библиографическое описание публикации включает: фамилию и инициалы автора, полное название работы, а также издания, в котором опубликована (для статей), город, название издательства, год издания, том (для многотомных изданий), номер, выпуск (для периодических изданий), объем публикации (количество страниц – для монографии, первая и последняя страницы – для статьи).

Ссылки на интернет-источники, базы данных и т. п. ресурсы, не поддающиеся библиографическому описанию, оформляются в виде примечаний (сносок).

13. В конце рукописи авторы могут поместить список использованных обозначений и сокращений.

14. Возвращение рукописи на доработку не означает, что рукопись уже принята к печати. Доработанный вариант необходимо прислать в редакцию в электронном виде с соблюдением всех требований вместе с ее начальной версией, рецензией и ответом на замечания рецензента не позднее двух месяцев со дня его отсылки. В противном случае первоначальная дата поступления рукописи при публикации не указывается.

15. Решение редакционной коллегии о принятии рукописи к печати или ее отклонении сообщается авторам.

В случае приема рукописи к публикации авторы должны прислать или передать в редакцию два бумажных экземпляра рукописи. Материалы печатаются на принтере на одной стороне стандартного (формат А4) листа белой бумаги. При этом тексты рукописи в бумажной и электронной версиях должны быть идентичными.

16. К рукописи прилагаются письмо от учреждения, в котором выполнена работа, и экспертное заключение о возможности ее опубликования в открытой печати. Если коллектив авторов включает сотрудников различных учреждений, необходимо представить направления от всех учреждений.

Сообщения, основанные на работах, выполненных в учреждении (учреждениях), должны содержать точное название и адрес учреждения (учреждений), публикуемые в статье.

17. После подготовки рукописи к печати редакция отправляет авторам электронную версию статьи с просьбой срочно сообщить в редакцию электронной почтой о замеченных опечатках для внесения исправлений в печатный текст.

18. После выхода журнала статьи размещаются на сайте физического факультета НГУ, а также на сайте Научной электронной библиотеки (elibrary.ru).

Адрес редакции

Физический факультет, к. 140 главного корпуса НГУ  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090,  
редакция «Сибирского физического журнала»

тел. +7 (383) 363 44 25  
physics@vestnik.nsu.ru