

Научная статья

УДК 621.384.6.01

DOI 10.25205/2541-9447-2024-19-2-15-22

Когерентные бетатронные колебания при инжекции в накопитель*

Сергей Павлович Шерстюк¹
Евгений Алексеевич Переведенцев²
Максим Вадимович Тимошенко³

¹⁻³ Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН
Новосибирск, Россия

^{1,2} Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия

¹S.P.Sherstyuk@inp.nsk.su

²E.A.Perevedent@inp.nsk.su

³M.V.Timoshenko@inp.nsk.su

Аннотация

Однооборотная (и одногустковая) инжекция часто происходит при большой интенсивности инжектируемого пучка, по сравнению с циркулирующим. Коллективные эффекты, возникающие благодаря поперечным импедансам, могут ограничить эффективность инжекции.

Были проанализированы условия сохранения дипольного момента при инжекции в присутствии машинной нелинейности, приводящей к расфазировке бетатронных колебаний. Теоретические результаты подкрепляются численным моделированием. Полученные выводы используются для интерпретации поведения реальных дипольных когерентных колебаний, наблюдаемых при инжекции в ВЭПП-2000.

Ключевые слова

бетатронные колебания, когерентные коллективные эффекты, ВЭПП2000

Для цитирования

Шерстюк С. П., Переведенцев Е. А., Тимошенко М. В. Когерентные бетатронные колебания при инжекции в накопитель // Сибирский физический журнал. 2024. Т. 19, № 2. С. 15–22. DOI 10.25205/2541-9447-2024-19-2-15-22

* Статья подготовлена по материалам конференции Russian Particle Accelerator Conference (RuPAC'23), Budker INP, 11–15 September 2023.

Coherent Betatron Oscillations in a Storage Ring at Injection

Sergey P. Sherstyuk¹, Evgeny A. Perevedentsev²
Maksim V. Timoshenko³

^{1,3}Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS,
Novosibirsk, Russia

^{1,2}Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

¹S.P.Sherstyuk@inp.nsk.su

²E.A.Perevedent@inp.nsk.su

³M.V.Timoshenko@inp.nsk.su

Abstract

A single-turn (and single-bunch) injection often operates with an injection portion of high intensity, comparable with that of the circulating bunch. Collective effects due to transverse impedance provide interaction between groups of particles. This interaction may set serious limitations on the injection efficiency.

We analyze the conditions of coherency of the betatron oscillations following the injection, while the beam is subject to decoherence resulting from the machine lattice nonlinearities. The theoretical results are supported by numerical tracking. The conclusions are compared with experimental data on dipole oscillations histories following the VEPP-2000 injection.

Keywords

betatron oscillations, coherent collective effects, VEPP2000

For citation

Sherstyuk S. P., Perevedentsev E. A., Timoshenko M. V. Coherent Betatron Oscillations in a Storage Ring at Injection. *Siberian Journal of Physics*, 2024, vol. 19, no. 2, pp. 15–22 (in Russ.). DOI 10.25205/2541-9447-2024-19-2-15-22

Введение

Комплекс ВЭПП-2000 состоит из бустера БЭП и коллайдера ВЭПП-2000 (рис.1).

Важная часть работы коллайдера – инжекция из бустера в коллайдер при наличии тока в последнем. В процессе инжектируемый ток может потеряться частично или полностью. Одной из причин может быть когерентная неустойчивость в системе двух пучков. Целью этой работы было построение модели коллективных эффектов, которая улучшит понимание процесса инжекции и может помочь в оптимизации параметров.

На первом этапе работы, в целях упрощения, не рассматривались встречные пучки и движение было искусственно сделано одномерным: горизонтальная и вертикальная бетатронные частоты в эксперименте 0,188 и 0,168.

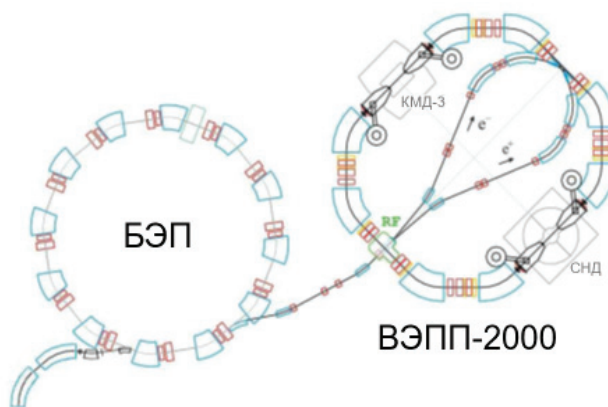


Рис. 1. План ускорительного комплекса ВЭПП-2000

Fig. 1. Layout of VEPP-2000 accelerator complex

1. Теоретическая модель

Представим две группы частиц (инжектируемую и циркулирующую) макрочастицами-осцилляторами, совершающими одномерные бетатронные колебания с нелинейностью и коллективным взаимодействием. Первая макрочастица имеет координату x и число частиц N_a , вторая макрочастица имеет координату y и число частиц N_b . В усредненной форме уравнения движения будут иметь вид:

$$\begin{cases} x'' + v_\beta^2 x = mx^3 + \Phi N_b \cdot (x - y) \\ y'' + v_\beta^2 y = my^3 + \Phi N_a \cdot (y - x). \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать решение пары уравнений (1) в виде медленных переменных:

$$\begin{aligned} x &= a(s) \cos(v_\beta \cdot s + \varphi(s)) \\ y &= a(s) \cos(v_\beta \cdot s + \varphi(s)) \end{aligned} \quad (2)$$

После усреднения по периоду быстрых колебаний (при этом были введены новые обозначения нелинейность $\mu = \frac{3}{8}m$, когерентный сдвиг на одну частицу, или на единицу тока, $\delta n = -\frac{\Phi}{2v_\beta}$) получится система:

$$\begin{cases} a' = -\delta n b N_b \sin(\varphi - \psi) \\ b' = \delta n a N_a \sin(\varphi - \psi) \\ \varphi' = \mu a^2 + \delta n N_b \left(1 - \frac{b}{a} \cos(\varphi - \psi)\right) \\ \psi' = \mu b^2 + \delta n N_a \left(1 - \frac{a}{b} \cos(\psi - \varphi)\right). \end{cases} \quad (5)$$

После замены

$$\begin{aligned} J &= a^2 - b^2 \\ Q &= a^2 N_a + b^2 N_b \\ \eta &= \varphi - \psi \end{aligned} \quad (4)$$

и новых обозначений, $N_0 = N_a + N_b$, $\Delta = N_a - N_b$, система (3) приобретет вид:

$$\begin{cases} J' = -\delta n \sqrt{(2Q + J \cdot N_0)^2 - (J\Delta)^2} \sin(\eta) \\ \eta' = \mu - \delta n \cdot \Delta + \delta n \frac{2Q\Delta + J(N_0^2 - \Delta^2)}{\sqrt{(2Q - J\Delta)^2 - (JN_0)^2}} \cos(\eta) \\ Q' = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Заменой $J \rightarrow J \cdot Q$, $\mu \rightarrow \mu/Q$ можно удалить Q из уравнений:

$$\begin{cases} J' = -2\delta n \sqrt{(2 - J\Delta)^2 - (JN_0)^2} \sin(\eta) \\ \eta' = \mu J - \delta n \cdot \Delta + \delta n \frac{2\Delta + J(N_0^2 - \Delta^2)}{\sqrt{(2 - J\Delta)^2 - (JN_0)^2}} \cos(\eta) \end{cases} \quad (6)$$

$\eta = 0; \pi$ – решения первого уравнения системы (6), решения второго уравнения будем называть J^* . Отдельно заметим, что если $J_1^* > 0$ – решение при $\eta = 0$, то при $\eta = \pi$ и замене $\Delta \rightarrow -\Delta$ величина $-J_1^*$ будет решением. Физически это соответствует замене номеров частиц.

Считая переменные J и η канонически сопряженными, можно построить гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2} \mu J^2 - \delta n \Delta \cdot J - \delta n \sqrt{(2 - J\Delta)^2 - (JN_0)^2} \cos(\eta). \quad (7)$$

Если вторым слагаемым можно пренебречь, то фазовый портрет при отрицательных μ получается поворотом «положительного» на π .

На рис. 2 изображены фазовые портреты частицы с амплитудой a . Это линии уровня гамильтониана (7) в переменных $(a = \sqrt{\frac{Q + JN_b}{N_a + N_b}}, \eta)$. Положение второй частицы при этом определяется параметром Q на азимуте 0 (в силу определения переменной η), частица b имеет координаты $(\sqrt{\frac{Q - a^2 N_a}{N_b}}, 0)$. Таким образом, стационарная точка с координатами $(J = 0, \eta = 0)$ отвечает совпадению двух макрочастиц, на рис. 2 она выделена синим. Важно отметить, что при $\mu < 0$ эта точка устойчива, а при $\mu > 0$ неустойчива, а считается всегда отрицательной.

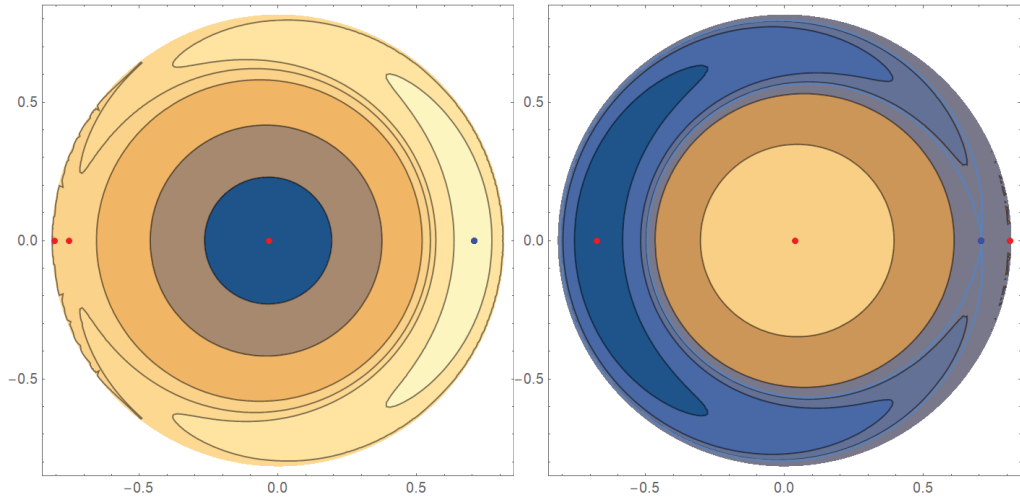


Рис. 2. Фазовые траектории частицы при разном знаке μ : слева $\mu < 0$, справа $\mu > 0$.

Синяя точка соответствует совпадению макрочастиц.

Fig. 2. Phase trajectories of macroparticle with different signs of μ : $\mu < 0$ on the left, $\mu > 0$ on the right.

Blue dot marks overlap case.

В окрестности $J = J^*$ стационарной точки будут фазовые колебания с частотой:

$$v_\phi^2 = \delta n \left(\mu Q \frac{2\Delta + (N_0^2 - \Delta^2)J^*}{\Delta - \left(\frac{\mu Q}{\delta n}\right)J^*} + \delta n \left(\left(\Delta - \left(\frac{\mu Q}{\delta n}\right)J^* \right)^2 + N_0^2 - \Delta^2 \right) \right) \quad (8)$$

При большой разнице токов $N_a \ll N_b$ частота колебаний вокруг $J^* = 0$ будет (что совпадает с [1]):

$$v_\phi^2 = \delta n (2\mu b^2 \cdot b + \delta n \cdot N_b^2). \quad (9)$$

Для небольших N_b :

$$v_\phi^2 = 2\delta n \mu b^2 \cdot N_b. \quad (10)$$

Таковыми колебаниями описывается движение макрочастиц с близкими начальными амплитудами колебаний при условии малости общего тока $\delta n N_0^2 \ll \mu Q$ и большой разницы токов $N_a \ll N_b$.

2. Симуляция

Компьютерная симуляция основана на усредненной системе уравнений (3). Положение каждой частицы при этом: $z = a \cdot e^{i\phi}$.

Тогда новое положение частицы приближенно можно записать как:

$$z_1 = (a + \tau a') e^{i\phi + i\tau\phi'} = (z_0 + \tau a' e^{i\phi}) e^{i\tau\phi'} \quad (11)$$

Величины a' и ϕ' берутся из системы (3):

$$z_1 = (z_0 - \tau \delta n b N_b \sin(\phi - \psi)) e^{i\tau \left(\mu a^2 + \delta n N_b \left(1 - \frac{b}{a} \cos(\phi - \psi) \right) \right)} \quad (12)$$

При взаимодействии с группой одинаковых частиц (суммарный заряд которых C_b , а число $-N_b$) вклады он них суммируются:

$$a' = -\delta n \sum \frac{b C_b}{N_b} \sin(\phi - \psi) = -\delta n \sum \frac{b C_b}{N_b} \text{Im} \left(e^{i(\phi - \psi)} \right) = -\delta n \cdot \text{Im} \left(e^{i\phi} \sum \frac{b C_b}{N_b} e^{-i\psi} \right) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \phi' &= \mu a^2 + \delta < \sum_i \frac{C_b}{N_b} \left(1 - \frac{b_i}{a} \cos(\phi - \psi_i) \right) = \mu a^2 + \delta n \sum_i \left(\frac{b C_b}{N_b} - \frac{b C_b}{a N_b} \text{Re} \left(e^{i(\phi - \psi_i)} \right) \right) = \\ &= \mu a^2 + \delta n C_b - \delta n \text{Re} \left(\frac{1}{a e^{-i\phi}} \sum_i \frac{b C_b}{N_b} e^{-i\psi_i} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Величину

$$D = \sum_i \frac{b_i C_{bi}}{N_b} e^{i\psi_i}$$

назовем дипольным моментом системы частиц. С учетом этого:

$$a' = -\delta n \cdot \text{Im} \left(e^{i\phi} \bar{D} \right) \quad (15)$$

$$\phi' = \mu a^2 + \delta n N_0 - \delta n \cdot \text{Re} \left(\frac{\bar{D}}{z_0} \right) \quad (16)$$

Шаг симуляции производится путем вычисления величины D , а затем вычисления нового положения каждой частицы по правилу (11) с учетом соотношений (15) и (16).

На рис. 3 представлена эволюция в фазовом пространстве начального распределения за 200 отсчетов симуляции. Нелинейность при этом полагается отрицательной.

Так как рассматриваются медленные переменные, то радиус-вектор точки стоит понимать как амплитуду бетатронных колебаний, а азимут – как сдвиг по фазе относительно центра

заряда. Таким образом, амплитуда колебаний дипольного момента (наблюдаемая пиками) соответствует проекции распределения в фазовом пространстве на горизонтальную ось.

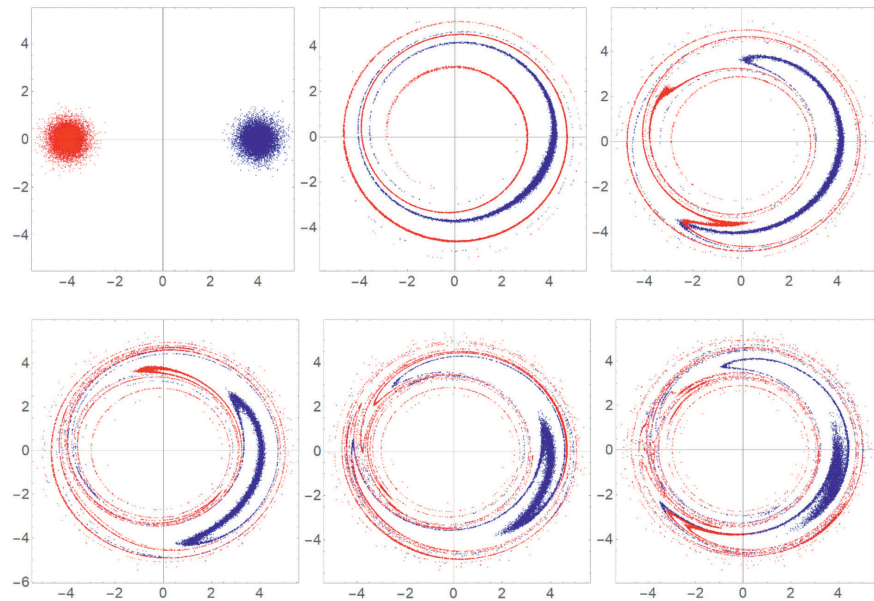


Рис. 3. Эволюция начального распределения в бетатронном фазовом пространстве

Fig. 3. Evolution of an initial distribution in betatron phase-space

Представим себе, что инжекция прошла, как изображено на рис. 3. Среди двух порций по 8000 каждая в начальный момент было 374 точек с модулем больше 4,8 (расстояние в 2σ от центра). В конце симуляции таких уже стало 1487. Это дает возможный механизм потери частиц при инжекции: во время обращения вокруг стационарной точки в фазовом пространстве амплитуда колебаний может расти. И если в момент инжекции обе порции частиц могут помещаться в апертуру, то из-за коллективного взаимодействия эта ситуация меняется.

Для сравнения теоретических выводов с симуляцией проверим выполнение зависимости (10). На рис. 4 представлены симулированные колебания полного дипольного момента при разных значениях интенсивности.

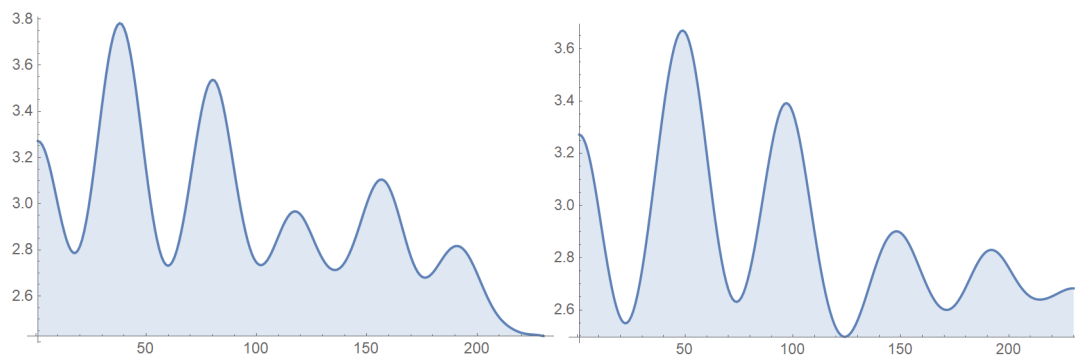


Рис. 4. Симуляция эволюции дипольного момента для разных токов.

Слева 5, справа 7 единиц интенсивности

Fig. 4. Simulated dipole momentum at different intensities.

5 units of intensity on the left, 7 units on the right

Периоды колебаний равны 50 отсчетам для 5 единиц интенсивности (левый график) и 42 для 7 (правый график), что находится в согласии с (10).

3. Измерения

Для экспериментальной проверки соотношения (10) использовались сигналы с контролирующей инжекцию пикапов. Знак нелинейности при этом был отрицательным, что было проверено серией ударов по пучку малой интенсивности. На рис. 5 – пара характерных сигналов. Левый – зависимость тока в ВЭПП-2000 от номера оборота: в кольце было 86 мА, инжектировали 20 мА, 10 мА было потеряно. Правый – измеренная в этот момент пикапом координата (положение центра заряда).

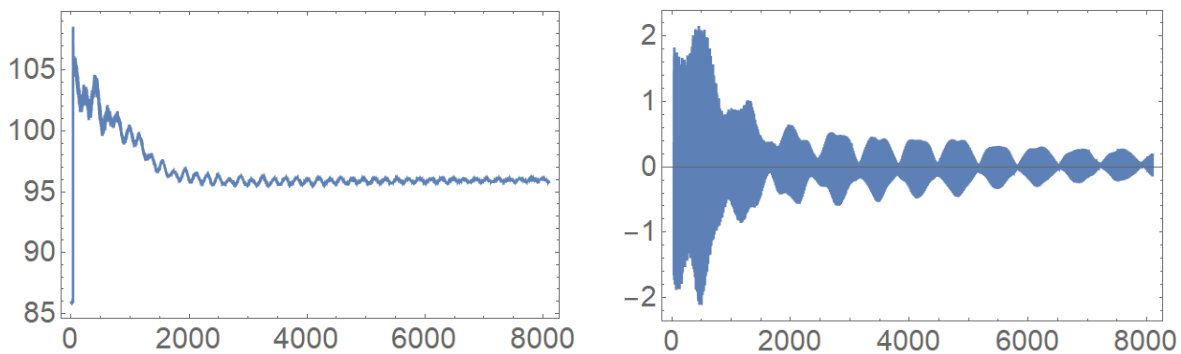


Рис. 5. Слева – зависимость тока в коллайдере от номера оборота.

Справа – положение центра заряда.

Fig. 5. Pick up signals of injection. Current vs number of turn on the left, center-of-charge position vs number of turn on the right

Примерно после 2000 оборотов видно установившийся режим колебаний – биения примерно постоянного периода. На рис. 6 зависимость логарифма средней частоты биений от логарифма тока. Наклон прямой подтверждает закон (10).

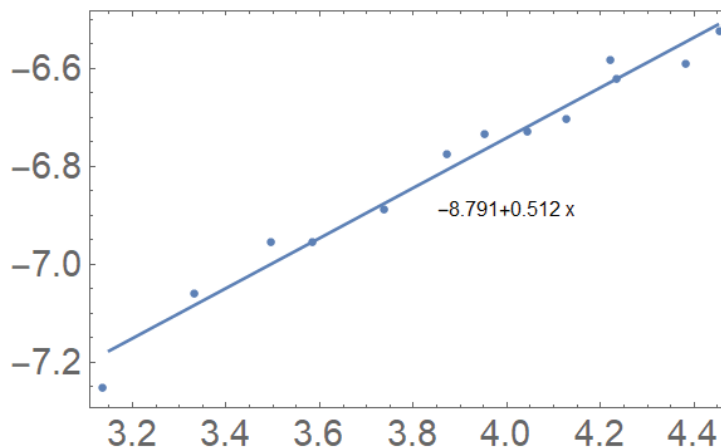


Рис. 6. Зависимость частоты от полного тока в логарифмических координатах

Fig. 6. Frequency vs current in the double logarithmic scale

Выводы

График на рис. 6 подтверждает зависимость $\sqrt{I}$ для частоты фазовых колебаний в сепаратрисе, в согласии с выбранной моделью. Колебания происходят вблизи стационарной точки с $J=0$, что говорит о том, что начальные амплитуды колебаний близки. Симуляция подтверждает этот вывод и предсказывает возможный механизм потери частиц в процессе инжекции.

Судя по теоретической зависимости частоты от тока, когерентные сдвиги частот в ВЭПП-2000 малы по сравнению со сдвигами, вызванными нелинейностью.

Существенным ограничением теоретической модели является жесткость макрочастиц, что означает, что выводы лучше всего годятся для небольших размеров пучков по сравнению с амплитудой их колебаний.

Список литературы

1. **Винокуров Н. А., Кулипанов Н. Г., Переведенцев Е. А.** Эффект отрицательной массы для нелинейной колебательной системы и его влияние на устойчивость когерентных бетатронных колебаний, препринт ИЯФ 76–88. 1976.

References

1. **Vinokurov N. A., Kulipanov N. G., Perevedentsev E. A.** “Negative mass effect” for nonlinear oscillating system and its influence on stability of coherent betatron oscillations, Preprint of INP 76–88, 1976.

Сведения об авторах

Шерстюк Сергей Павлович, магистрант

Переведенцев Евгений Алексеевич, ведущий научный сотрудник

Тимошенко Максим Вадимович, младший научный сотрудник

Information about the Authors

Sergey P. Sherstyuk, Master Student

Evgeny A. Perevedentsev, Leading Researcher, Associate Professor

Maksim V. Timoshenko, Junior Researcher

Статья поступила в редакцию 15.09.2023; одобрена после рецензирования 20.09.2023;

The article was submitted 15.09.2023; approved after reviewing 20.09.2023;

accepted for publication 27.02.2024