

УДК 535:621.373.826:539
DOI 10.25205/2541-9447-2020-15-1-90-97

Моды бегущих электромагнитных волн в цилиндрах

А. А. Ковалёв

*Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН
Новосибирск, Россия*

Аннотация

Предложен алгоритм численного расчета мод бегущих электромагнитных волн для сплошного и полого твердотельных цилиндров. Определены комплексные собственные значения угловых параметров, характеризующих излучательные моды и моды шепчущей галереи (whispering gallery mode, WG-мода). Мнимая часть полярной компоненты волнового вектора волны имеется у всех мод, включая WG-моды. Расчет проведен для конкретных размеров цилиндров. Рассчитаны распределения поля в области цилиндров. Изучена зависимость параметров мод от коэффициентов экстинкции материала цилиндра. Соотношение плотностей потоков энергии радиального и полярного направлений показывает резкое изменение при переходе от излучательных мод к WG-модам.

Ключевые слова

бегущие электромагнитные волны, моды шепчущей галереи

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-29-20007мк

Для цитирования

Ковалёв А. А. Моды бегущих электромагнитных волн в цилиндрах // Сибирский физический журнал. 2020. Т. 15, № 1. С. 90–97. DOI 10.25205/2541-9447-2020-15-1-90-97

Modes of Travelling Electromagnetic Waves within Cylinders

A. A. Kovalyov

*Rzhanov Institute of Semiconductor Physics SB RAS
Novosibirsk, Russian Federation*

Abstract

An algorithm is proposed for numerical calculation of traveling electromagnetic wave modes for solid and hollow solid state cylinders. Complex eigenvalues are defined for angular parameters characterizing emissive modes and whispering gallery modes (WG-mode). The polar component imaginary parts of the wave vectors are found for all modes, including WG modes. The calculation is carried out for the fixed cylinder sizes. The field distributions are calculated inside the cylinders. The dependence of the mode parameters on the extinction coefficients of the cylinder material was studied. The ratio of the density of energy fluxes for the radial and polar directions shows a sharp change when passage from the emissive modes to WG modes.

Keywords

traveling electromagnetic wave, whispering gallery mode

Acknowledgements

The study was financially supported by the RFBR grant No. 18-29-20007mk

For citation

Kovalyov A. A. Modes of Travelling Electromagnetic Waves within Cylinders. *Siberian Journal of Physics*, 2020, vol. 15, no. 1, p. 90–97. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2020-15-1-90-97

© А. А. Ковалёв, 2020

Введение

Ранние рассмотрения мод цилиндров проводились для звуковых волн в помещениях цилиндрической формы [1]. При этом истечением звуковой энергии через стенки пренебрегалось, и рассматривалась только мода шепчущей галереи (whispering gallery mode, WG-мода) – волна, энергия которой находится вблизи стенки комнаты. Соответствующее решение волнового уравнения выражается через функции Бесселя $J_n(z)$ с большими значениями порядка n .

Искаженные поверхности рассматривались для случаев полых волноводов при условиях малой кривизны и больших диаметров волновода (по сравнению с длиной волны) [2; 3]. Так, в [3] моды определялись из решения системы линейных уравнений для различного количества отражений плоских волн на стенках волновода.

В наше время диски и кольца из полупроводниковых материалов используются в лазерах. Модовая структура дисков и колец изучена слабо. Например, в [4] рассчитывается поле в кольце фиксированной толщины, но эти расчеты пригодны только для получения WG-мод. Такое рассмотрение аналогично расчету поля в прямолинейном волноводе с заменой тригонометрических функций на Бесселевы с целым значением порядка. При этом пренебрегается утечкой волны во внешнюю среду из-за кривизны поверхности. Очевидно, что при круговом замыкании поля такой метод расчета приводит лишь к небольшим отклонениям от мод прямолинейного волновода, а потери при распространении волны по кругу не учитываются.

Обычно предполагается [5; 6], что при возбуждении дисковой гетероструктуры возбуждается только WG-мода. Однако нельзя отбрасывать возбуждение дисковым электродом излучательных мод, заполняющих все внутреннее пространство диска. То, что это внутреннее пространство излучает, видно из фотографий излучающего полукольца в [5; 6]. В случае получения генерации на WG-модах спонтанное излучение из внутренних областей диска образует дополнительные потери, уменьшающие эффективность лазера. Поэтому представляется необходимым определить весь набор мод диска, которые возбуждаются дисковым электродом.

Для нахождения характеристик бегущих волн можно ставить граничные условия для различных конфигураций среды. Например, можно рассматривать полуцилиндры или предположить наличие при фиксированном азимутальном угле φ разрыва с любыми граничными условиями, соответствующими, например, идеально поглощающей пленке. В частности, можно рассматривать и обычный вариант для напряженности электрического поля E вида $E(\varphi) = E(\varphi + 2\pi)$. В этом случае возможно решение в виде стоячей волны. В реальной ситуации не может быть полной симметрии. Так, для случая звуковых волн в галереях, источником асимметрии может служить открытая дверь. Моды бегущих волн являются близким аналогом мод волновода, а не резонатора.

Цель данной публикации – разработка алгоритма численного расчета мод электромагнитных бегущих волн для сплошного и полого твердотельных цилиндров с учетом коэффициентов экстинкции материала цилиндра. В перспективе разработка метода должна способствовать получению более реалистичной оценки эффективности современных микроскопических излучателей, разрабатываемых для задач фотоники.

Сплошной цилиндр

Мы имеем задачу с цилиндрической симметрией. Параметры рассматриваемой структуры показаны на рис. 1, a , цилиндр обладает бесконечной длиной по координате z .

Показатель преломления внешней среды $\hat{n} = 1$, показатель преломления материала цилиндра в общем случае комплексный $\hat{n} = n + ik$. Текущие координаты в цилиндре – расстояние от центра и азимутальный угол (r, φ) , единица измерения длины – $\lambda/2\pi$, где λ – длина световой волны.

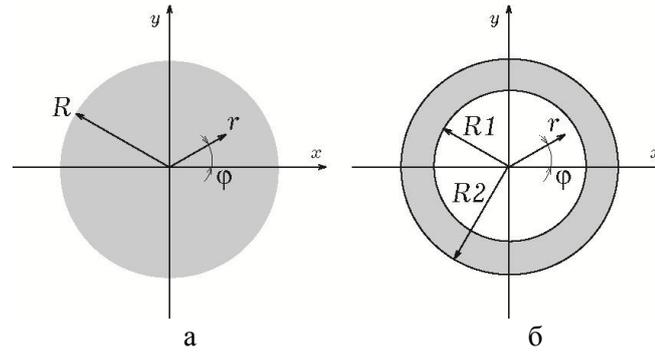


Рис. 1. Геометрия рассмотренных устройств: а – сплошной цилиндр; б – полый цилиндр
 Fig. 1. Geometry of devices under consideration: left – solid cylinder, right – hollow cylinder

Ищем TE -моды для цилиндра ($E_z, H_\varphi \neq 0$). Для E_z имеем: $E_z \sim \exp(ip\varphi)$, где $p = p' + ip''$. Уравнения для компонент поля выглядят так:

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} + \left(\hat{n}^2 - \frac{p^2}{r^2} \right) E_z = 0; \quad H_\varphi = i \frac{dE_z}{dr}.$$

Подставляя $E_z = \exp\left(i \int \frac{z}{r} dr\right)$, приходим к уравнению:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{i}{r} (\hat{n}^2 r^2 - p^2 - z^2); \quad z = z' + iz'' \quad (1)$$

Приближенное решение уравнения (1) вблизи $r = 0$, ограниченное по величине, на расстоянии $r = r_0$ равно $z_0 = p'' - ip'$. Решение во всей области цилиндра $r \leq R$ может быть получено численно, продвигаясь от r_0 к R с шагом h :

$$z = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3, \quad (2)$$

где

$$a_0 = z_0 + \frac{i \hat{n}^2 r^2}{2(i z_0 + 1)}; \quad a_1 = \frac{i}{r} (\hat{n}^2 r^2 - p^2 - a_0^2); \quad a_2 = -\frac{a_0 a_1}{r}; \quad a_3 = -\frac{i}{3r} (2a_0 a_2 + a_1^2).$$

Решением при $r \rightarrow \infty$ является уходящая от цилиндра волна. Ограничиваясь членами $\sim 1/r^2$, имеем

$$z = \hat{n}r + \frac{i}{2} - \frac{a}{\hat{n}r} + \frac{ia}{\hat{n}^2 r^2}, \quad a = \frac{1}{2} \left(p^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (3)$$

Во всей области вне цилиндра решение может быть получено численно, переходя от r к $(r-h)$ по формуле

$$z = z_{\infty} - dh, \quad d = \frac{i}{r} (\hat{n}^2 r^2 - p^2 - z_{\infty}^2). \quad (4)$$

Так как внутри цилиндра ($r \leq R$) имеется только одна ограниченная по амплитуде волна, а вне диска также одна волна, то граничное условие при $r = R$ имеет вид

$$z|_{R_-} = z|_{R_+}.$$

Здесь $z|_{R_-}$ находится при численном решении по формуле (2), исходя из приближенного решения при $r \rightarrow 0$, а $z|_{R_+}$ находится из численного решения вне цилиндра при $r \leftarrow \infty$ (формулы (3), (4)). Граничное условие для $H_{\varphi} = -E_z z/r$ выполняется автоматически.

Численно находим минимумы функции двух переменных (p' , p''):

$$F(p) = |z'_{R_-} - z'_{R_+}| + |z''_{R_-} - z''_{R_+}|.$$

Минимальные значения функции $F(p)$ равны нулю. Можно, используя другой вариант целевой функции, искать ее нули. Результирующие p' , p'' являются параметрами, характеризующими моды цилиндра. Для случая $R = 10$ (в единицах $\lambda/2\pi$), $n = 3, 5$, $\kappa = 10^{-5}$ полученные моды показаны на рис. 2.

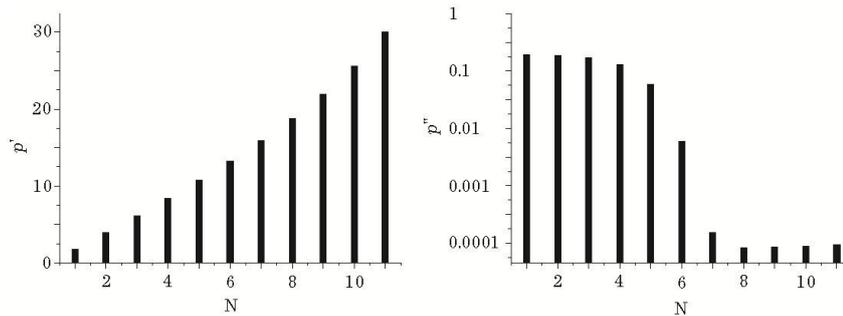


Рис. 2. Моды сплошного цилиндра. Зависимость p' (слева) и p'' (справа) от номера моды

Fig. 2. Solid cylinder modes. Dependences on mode number for p' (left) and p'' (right)

Моды расположены приблизительно на одинаковых расстояниях по шкале p' . Потери мод, обусловленные истечением волны из цилиндра, резко уменьшаются в области (6–7) моды, что можно рассматривать как переход в область полного внутреннего отражения на поверхности цилиндра.

Распределение поля ($E_z = \text{Re}(E_z)$ и $E_z = \text{Im}(E_z)$) в цилиндре и вне его для нескольких мод показано на рис. 3.

При небольших индексах моды поле равномерно распределено по цилиндру, и существенная часть энергии моды находится вне цилиндра. С увеличением индекса почти вся энергия находится в цилиндре у его края (whispering gallery mode), энергия моды вне цилиндра быстро затухает с ростом r .

На рис. 4 показано, как меняются параметры (p' , p'') при увеличении поглощения в материале цилиндра для нескольких мод. Область изменения κ : $10^{-5} \div 10^{-2}$.

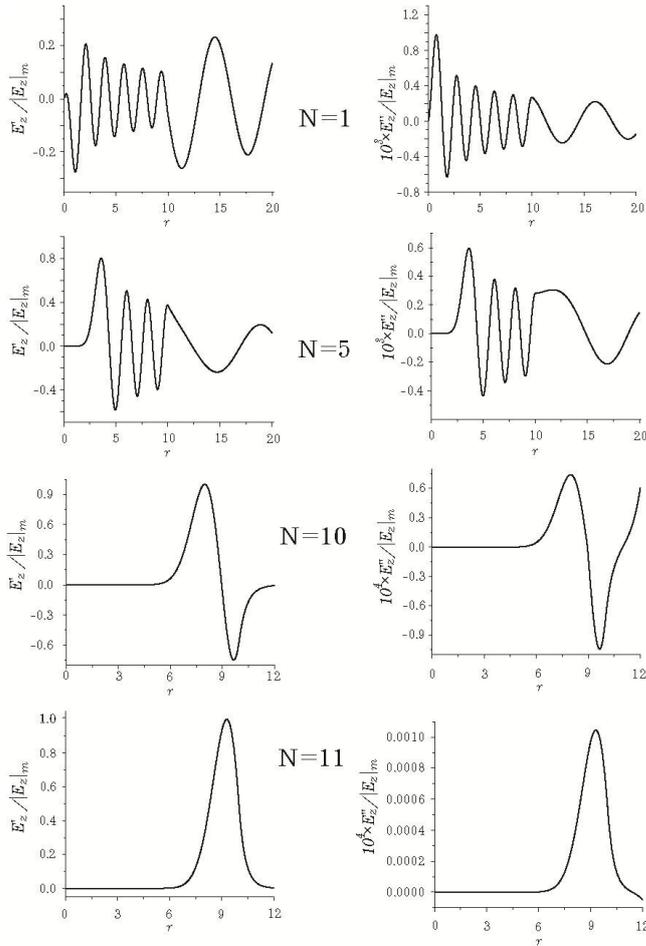


Рис. 3. Распределение поля (действительной и мнимой части) для нескольких мод: $N = 1, 5, 10, 11$, сплошной цилиндр, $R = 10$, $|E_z|_m$ – максимальное значение модуля поля E_z

Fig. 3. Field distribution (real and imaginary parts) for several modes: $N = 1, 5, 10, 11$, solid cylinder, $R = 10$, $|E_z|_m$ is maximum value of the field module E_z

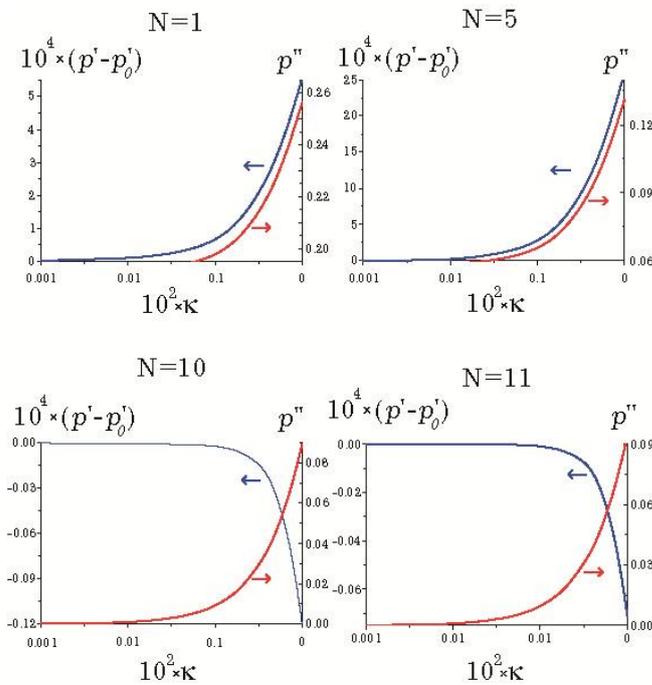


Рис. 4. Зависимость параметров мод p' и p'' от коэффициента экстинкции в материале сплошного цилиндра: $p'_0 = p'$ при $\kappa = 10^{-5}$

Fig. 4. Dependence of mode parameters p' and p'' on the extinction coefficient κ in the material for solid cylinder: $p'_0 = p'$ for $\kappa = 10^{-5}$

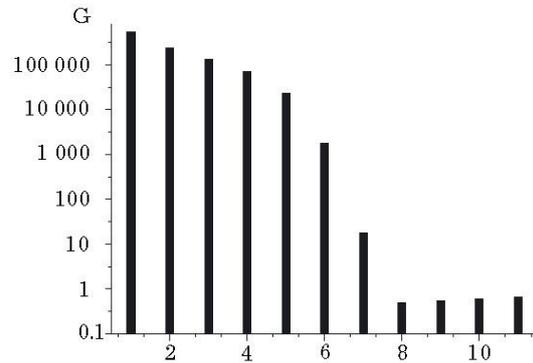
График на рис. 5 отражает поведение отношения радиальной составляющей плотности потока энергии (S_r) к аналогичной его составляющей, направленной по φ в точке R . Легко определить, что в нашем случае

$$\frac{S_r}{S_\varphi} = \frac{z'}{r} \Big|_R.$$

По вертикальной оси отложена величина $G = 10^5(S_r/S_\varphi) + 1$. В случае обычного линейного волновода $z' = 0$, и, следовательно, $S_r = 0$. В случае цилиндра величина S_r/S_φ принципиально отлична от нуля. Для мод с малыми индексами имеется существенная утечка ($S_r/S_\varphi \sim 1$), для больших индексов эта величина может принимать отрицательные значения, т. е. энергия утекает в цилиндр извне, что не удивительно, так как расчет проведен для $\kappa = 10^{-5}$ в цилиндре и отсутствия поглощения вне цилиндра.

Рис. 5. Зависимость, характеризующая отношение радиальной составляющей вектора Пойнтинга к тангенциальной на поверхности сплошного цилиндра от номера моды $G = 10^5(S_r/S_\varphi) + 1$

Fig. 5. Dependence on the mode number for the ratio of the radial component of Poynting vector S_r to the tangential one S_φ at the surface of solid cylinder ($G = 10^5 S_r/S_\varphi + 1$)



Полый цилиндр

Рассматриваемая геометрия показана на рис. 1, б. Цилиндр имеет бесконечную длину, внутренний диаметр равен R_1 , внешний R_2 . Вне цилиндра и внутри него находится среда с показателем преломления $\hat{n} = 1$. Для самого цилиндра имеем $\hat{n} = n + ik$. В этом случае решение уравнения (1) внутри цилиндра ($r < R_1$) и вне его ($r > R_2$) находится аналогичным способом с помощью соотношений (2), (3) при $\hat{n} = 1$. В самом материале цилиндра имеется, кроме уходящей волны (3), обозначим ее z_a , волна, идущая к центру (z_b), которая при $r \rightarrow \infty$ имеет вид

$$z_b = -\hat{n}r + \frac{i}{2} + \frac{a}{\hat{n}r} + \frac{ia}{\hat{n}^2 r^2},$$

где a имеет то же значение, что и в (4).

Вне цилиндра имеем

$$E_z = B \exp\left(i \int_{R_2}^r \frac{z_1}{\xi} d\xi\right); \quad H_\varphi = -\frac{z_1}{r} E_z.$$

Внутри цилиндра:

$$E_z = C \exp\left(i \int_{r_0}^r \frac{z_2}{\xi} d\xi\right); \quad H_\varphi = -\frac{z_2}{r} E_z.$$

В цилиндре:

$$E_z = A_a \exp\left(i \int_{R_1}^r \frac{z_a}{\xi} d\xi\right) + A_b \exp\left(i \int_{R_1}^r \frac{z_b}{\xi} d\xi\right),$$

$$H_\varphi = -\frac{z_a}{r} A_a \exp\left(i \int_{R_1}^r \frac{z_a}{\xi} d\xi\right) - \frac{z_b}{r} A_b \exp\left(i \int_{R_1}^r \frac{z_b}{\xi} d\xi\right).$$

Переобозначим $C = E_z(R_1)$ и обозначим $z_{a1} = z_a(R_1)$, $z_{b1} = z_b(R_1)$, $z_{a2} = z_a(R_2)$, $z_{b2} = z_b(R_2)$. Тогда для граничных условий при $r = R_1$ имеем

$$A_a + A_b = C; \quad z_{a1}A_a + z_{b1}A_b = z_2C, \quad (5)$$

а при $r = R_2$

$$A_a e^{i\Phi_a} + A_b e^{i\Phi_b} = B; \quad z_{a2}A_a e^{i\Phi_a} + z_{b2}A_b e^{i\Phi_b} = z_1B, \quad (6)$$

где $\Phi_a = \int_{R_1}^{R_2} \frac{z_a}{\xi} d\xi$, $\Phi_b = \int_{R_1}^{R_2} \frac{z_b}{\xi} d\xi$.

Совместное решение (5) и (6) приводит к уравнению для мод полого цилиндра:

$$F = (z_{a1} - z_2)(z_{b2} - z_1) - (z_{a2} - z_1)(z_{b1} - z_2)e^{i(\Phi_a - \Phi_b)} = 0.$$

Аналогично случаю сплошного цилиндра находятся нули функции $|\operatorname{Re}F| + |\operatorname{Im}F|$. Результаты расчета мод для случая $R_1 = 10$; $R_2 = 11$ при $n = 3, 5$ и $\kappa = 10^{-5}$ показаны на рис. 6.

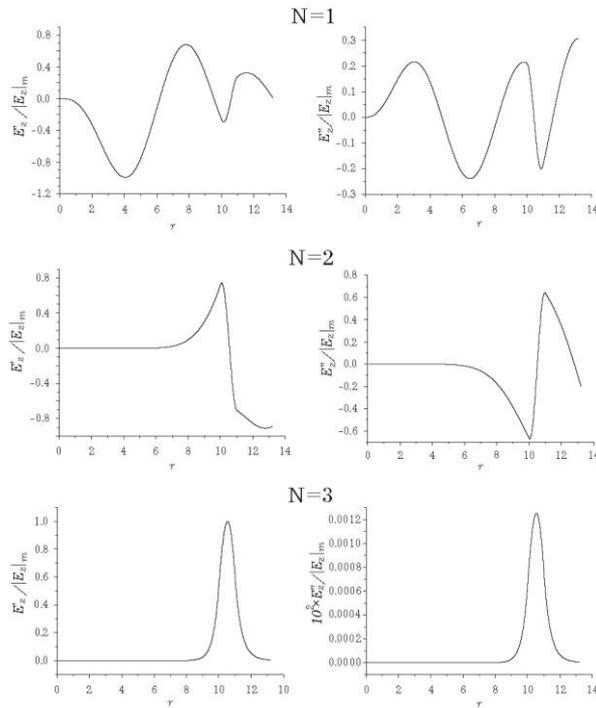


Рис. 6. Моды полого цилиндра ($N = 1, 2, 3$).
 Параметры цилиндра: $n = 3,5$; $\kappa = 10^{-5}$;
 $R_1 = 10$; $R_2 = 11$
 Fig. 6. Hollow cylinder modes ($N = 1, 2, 3$).
 Cylinder parameters: $n = 3.5$; $\kappa = 10^{-5}$;
 $R_1 = 10$; $R_2 = 11$

Здесь имеется только три моды: одна из них занимает значительную область, включающую цилиндр, поле второй находится в основном в области вблизи цилиндра, поле третьей – в теле цилиндра и быстро затухает вне его (WG-мода).

Заключение

Численно решена задача определения мод бегущих волн в бесконечных цилиндрах для $E_z \neq 0$, $H_z = 0$. Метод решения пригоден для определения мод резонаторов, включающих цилиндрические поверхности с постановкой различных граничных условий на выделенных φ . Для цилиндров конечных размеров по z пригодны те же формулы с заменой $\hat{n}^2 \rightarrow \hat{n}^2 - p_z^2$ и добавлением соответствующих граничных условий по z .

Расчет проведен для цилиндров из полупроводникового материала малого ($\sim \lambda$) радиуса, но метод расчета пригоден для цилиндров любых радиусов. Изменится лишь плотность мод $\delta p' \sim 1/R$ и сдвинется граница между областью малых потерь и областью излучения (см. рис. 2, справа).

Представленный метод расчета позволяет, дополнив граничными условиями по z и по φ , рассматривать различные конфигурации резонаторов, в том числе круговые сектора цилиндров (полуцилиндры и т. п.). В частности для полупроводниковых лазеров рассчитывать оптимальные размеры электродов, через которые носители инжектируются в нужные моды резонатора. Выбирая радиус возбуждающего электрода в области мод излучения (см. рис. 2, справа), можно регулировать долю выводимой мощности из лазера с цилиндрическим резонатором (см. рис. 5). Учитывая это в проектировании лазерных источников излучения, можно существенно повысить их эффективность.

Список литературы / References

1. **Lord Rayleigh**. The problem of the Whispering Gallery. *Phil. Mag.*, 1910, vol. 20, no. 120, p. 6.
2. **Marcatili E. A. J., Schmeltzer R. A.** Hollow metallic and Dielectric Waveguides for Long Distance Optical Transmission and Lasers. *Bell Syst. Tech. J.*, 1964, vol. 43, p. 1783–1809.
3. **Krammer Hermann**. Propagation of modes in curved hollow metallic waveguides for the infrared. *Applied Optics*, 1977, vol. 16, no. 8, p. 2163–2165.
4. **Ge Liu, Shengguang Liu, Jiaqiang Wu**. Theoretical analysis of whispering-gallery mode ring dielectric resonator. *Int. Journ. of Infrared and Millimeter Waves*, 1995, vol. 16, no. 3, p. 629–639.
5. **Monakhov A. M., Sherstnev V. V., Astakhova A. P., Yakovlev Yu. P., Boissier G., Teissier R., Baranov A. N.** Experimental observation of whispering gallery modes in sector disk lasers. *Applied Physics Lett.*, 2009, vol. 94, p. 051102.
6. **Yakovlev Yu. P., Monakhov A. P., Astakhova A. P., Baranov A. N., Boissier G., Grebenshchikova E. N., Kizhaev S. S., Sherstnev V. V., Teissier R.** Middle-IR whispering gallery mode lasers. In: 18th Int. Symp. “Nanostructures: Physics and Technology”. St. Petersburg, Russia, 2010. P. 31–32.

Материал поступил в редколлегию
Received
17.02.2020

Сведения об авторе / Information about the Author

Ковалёв Александр Анатольевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИФП СО РАН (Новосибирск, Россия)

Alexander A. Kovalyov, candidate of Phys.-Math. Sciences, senior researcher ISP SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)

kovalev@isp.nsc.ru